GEOMETRISCHE
DEUTUNG DER ADDITIONSTHEOREME
DER
HYPERELLIPTISCHEN INTEGRALE UND FUNCTIONEN
ERSTER ORDNUNG
IM
SYSTEM DER CONFOCALEN FLÄCHEN ZWEITEN GRADES.

HABILITATIONSSCHRIFT,
WELCHE
NEBST DEN AUFGESTELLTEN THESEN
MIT
ZUSTIMMUNG DER PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT
DER
KÖNIGLICHEN UNIVERSITÄT BRESLAU
ZUR
ERLANGUNG DER VENIA DOCENDI
AM MITTWOCH, DEN 7. MÄRZ 1883, MITTAGS 12 UHR
IN DER KLEINEN AULA DER UNIVERSITÄT
GEGEN DIE HERREN

DR. PHIL. F. AUERBACH, DOCENTEN AN DER UNIVERSITÄT,
DR. PHIL. E. TÖPLITZ, ORDENTLICHEN LEHRER AM JOHANNEUM,

ÖFFENTLICH VERTHEIDIGEN WIRD

DER VERFASSER

DR. PHIL. OTTO STAUDE.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.
1883.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543119_0031

Einleitung.

Indem die Theorie der hyperelliptischen Functionen 1. Ordnung seit Jacobi's Formulirung des Umkehrproblems auf die Benutzung *zweier* unabhängiger complexer Variabler als der Elemente der Untersuchung hingewiesen worden war, hat sie diese Elemente bald in abstracter Form als *zwei Individua eines algebraischen Gebildes* vom Geschlechte 2, bald in geometrischer Form als *Punktepaare auf einer Riemann'schen Fläche oder einer algebraischen Curve* von gleichem Geschlechte vorgestellt. Neben diese Auffassungen, denen die simultane Betrachtung *zweier* unabhängiger Elemente in einem *zweifach* ausgedehnten Gebilde wesentlich ist, trat die Vorstellung *eines* Individuums in einer *vierfach* ausgedehnten Mannigfaltigkeit. So erschien die Vereinigung zweier unabhängiger complexer Variabler durch ein einziges geometrisches Element vertreten, sei es dass man, nach Analogie der Gauss'schen Darstellung einer complexen Veränderlichen, den reellen Punkt im Raume von vier Dimensionen, sei es dass man, mit Zuziehung complexer Bestandtheile des gewöhnlichen Raumes, den Punkt oder die Tangentialebene einer Fläche oder den Strahl eines Strahlensystems in's Auge fasste.

Wenn die Verwendung des reellen vierdimensionalen Raumes naturgemäss weniger geeignet schien, die analytische Vorstellung zu unterstützen, so gewann dagegen die Benutzung der im reellen Gebiete des gewöhnlichen Raumes zweifach, im complexen Gebiete vierfach ausgedehnten Gebilde um so höheres Interesse.

In unmittelbare Beziehung zu der Geometrie der *Flächen* tritt die Theorie der hyperelliptischen Functionen mit der von Herrn Weierstrass*) gegebenen Darstellung der Punktcoordinaten der *Fläche*

*) Vgl. Weierstrass, Ueber die geodätischen Linien auf dem dreiaxigen Ellipsoid, Monatsberichte der Kgl. Academie zu Berlin, Jahrg. 1861, S. 986. Diese Arbeit enthält implicite das im Text bezeichnete Resultat.

2. *Grades* durch Quotienten der hyperelliptischen ϑ-Functionen von 2 Variabeln. Durch Untersuchungen über Cyclidensysteme wird ferner Herr Darboux*) zur Darstellung der *Cycliden* und durch Specialisirung dieser Flächen 4. Ordnung zur Darstellung der *allgemeinen Fläche 3. Ordnung* durch hyperelliptische Functionen geführt. Hieran schliesst sich die Darstellung der *Kummer'schen Fläche,* auf welche, ausgehend von der Einführung der elliptischen Liniencoordinaten im System der confocalen Strahlencomplexe zweiten Grades, Herr Klein**) hinweist, und welche, gestützt auf die Theorie der identischen Relationen zwischen den ϑ-Functionen zweier Veränderlicher, die Herren Cayley***), Borchardt†) und Weber††) auffinden. Den Zusammenhang der verschiedenen Darstellungen der Kummer'schen Fläche zeigt Herr Rohn†††), indem er die Transformation 1. und 2. Ordnung der hyperelliptischen Functionen in Verbindung mit der Geometrie der Kummer'schen Fläche untersucht.

In dieses Gebiet geometrischer Deutungen der hyperelliptischen Functionen, bei welchen das Paar zweier unabhängiger Variabler durch ein Element eines vierfach ausgedehnten geometrischen Gebildes im complexen Gebiete des gewöhnlichen Raumes vertreten wird, fallen die Untersuchungen der vorliegenden Arbeit.

Dieselbe beabsichtigt die Additionstheoreme der hyperelliptischen Integrale und Functionen vom Geschlechte $p = 2$ im System der confocalen Flächen 2. Grades zu deuten und die bezüglichen functionentheoretischen Sätze an elementargeometrische Vorstellungen anzuknüpfen. Dass gerade die Additionssätze den Zielpunkt der Betrachtung bilden, mag seine Rechtfertigung in dem historischen Interesse derselben finden: nachdem die Theorie der hyperelliptischen Functionen aus wesentlich analytischen Gesichtspunkten nach Analogie mit der Theorie

*) Vgl. Darboux, Sur une nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques, Comptes Rendus, Bd. 69 (1869), S. 392; Mémoire sur une classe de courbes et de surfaces, Comptes Rendus, Bd. 68 (1869), S. 1311; Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, Paris 1873, S. 148—150.

**) Vgl. Klein, Ueber gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen, Mathematische Annalen, Bd. V (1872), S. 302.

***) Vgl. Cayley, On the double Θ-functions in connexion with a 16-nodal quartic surface, Crelle's Journal, Bd. 83 (1877), S. 210.

†) Vgl. Borchardt, Ueber die Darstellung der Kummer'schen Fläche 4. Ordnung mit 16 Knotenpunkten durch die Göpel'sche biquadratische Relation etc., ibid. S. 234.

††) Vgl. Weber, Ueber die Kummer'sche Fläche 4. Ordnung mit 16 Knotenpunkten und ihre Beziehung zu den ϑ-Functionen mit 2 Veränderlichen, ibid. Bd. 84 (1878), S. 332.

†††) Vgl. Rohn, Transformation der hyperelliptischen Functionen $p = 2$ und ihre Bedeutung für die Kummer'sche Fläche, Mathemat. Annalen, Bd. XV (1879), S. 315.

der elliptischen Functionen aufgebaut worden ist, scheint es berechtigt, die hyperelliptischen Functionen nachträglich nach denjenigen geometrischen Beziehungen zu verfolgen, aus welchen die Theorie der elliptischen Functionen ihre erste Anregung geschöpft hat. Die Tendenz geometrischer Anschaulichkeit mag ferner die *Beschränkung auf bestimmte Realitätsverhältnisse* der benutzten geometrischen Gebilde rechtfertigen, welche für die folgenden Ausführungen massgebend gewesen ist.

Es macht deshalb die Untersuchung keinen Anspruch darauf, den bearbeiteten Stoff in seiner ganzen Reichhaltigkeit erschöpft zu haben. Es bliebe einer weiteren Bearbeitung vorbehalten, die entwickelten Resultate nach allgemeineren Richtungen auszudehnen. An Stelle des *Systems der confocalen Flächen* würde als geometrische Grundlage die *allgemeine Flächenschaar 2. Grades*, sowie mit gleichem Rechte das reciproke Gebilde des *Flächenbüschels*, einzutreten haben.

Neben die Betrachtung der *Additionstheoreme* würde die analoge Behandlung aller der einzelnen Gebiete gestellt werden müssen, welche die analytische Theorie der hyperelliptischen Functionen darbietet. Darüber hinaus könnte man zu den von Jacobi*) eingeführten Systemen confocaler Flächen und den projectivischen Verallgemeinerungen derselben *in Räumen von* $p + 1$ *Dimensionen* aufsteigen, und hier die hyperelliptischen Functionen *von beliebigem Geschlechte* p in entsprechender Weise deuten. Der unmittelbaren Weiterführung**) der von Jacobi***) angeregten Arbeiten über die geometrische Anwendung der elliptischen Functionen auf Kegelschnittsysteme würde damit ihre Grenze gesetzt sein.

Was die allgemeine Disposition der vorliegenden Arbeit angeht, so ist in Kapitel I die geometrische Bedeutung der symmetrischen *algebraischen Functionen* zweier unabhängiger Variabler (§§ 1, 3, 4) und der Differentiale der *Integralfunctionen* (§§ 5, 7) *eines hyperelliptischen Gebildes* vom Geschlecht $p = 2$ abgeleitet, sowie die Mehrdeutigkeit der algebraischen Irrationalitäten des Gebildes (§§ 2, 6) geometrisch interpretirt.

In Kapitel II erscheint die durch die hyperelliptischen ϑ-Func-

*) Vgl. Jacobi's Vorlesungen über Dynamik, herausgeg. von Clebsch, S. 198.

**) Als ein Beitrag zu dieser Weiterführung schliesst sich die vorliegende Arbeit den früheren Aufsätzen des Verfassers: „Ueber Fadenconstructionen des Ellipsoides" (Math. Annalen, Bd. XX, S. 147) und: „Ueber geodätische Polygone auf den Flächen 2. Grades" (ibid. Bd. XXI, S. 219) an; über deren Absicht und Veranlassung vgl. Math. Annalen, Bd. XXI, S. 219.

***) Vgl. Jacobi, „Ueber die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie", Crelle's Journal, Bd. 3, S. 376.

tionen erreichte *Verknüpfung* der algebraischen und Integralfunctionen unter der Form von *Parameterdarstellungen* geometrischer Gebilde versinnlicht. Es wird dadurch eine *Weiterführung der Weierstrass'schen Darstellung der Fläche 2. Grades* in dem Sinne angestrebt, dass einerseits neben den 4 ϑ-Functionen, welche den homogenen Coordinaten der Punkte der Fläche proportional gesetzt sind, auch die 12 übrigen ϑ-Functionen ihre Bedeutung erhalten, andrerseits aber über die einzelne Fläche hinausgreifend, der ganze Raum der Behandlung mittels transcendenter Parameter zugänglich gemacht wird.

Endlich giebt Kapitel III als eine Anwendung der erhaltenen Parameterdarstellungen die Deutung der *einfachen Additionstheoreme* der ϑ-Functionen und der Integrale der 3 Gattungen.

Die Deutung des allgemeinen Abel'schen Additionstheorems für die hyperelliptischen Integrale 1. Ordnung im Strahlensystem der gemeinsamen Tangenten zweier confocalen Flächen 2. Grades, welche sich ebenfalls auf die Resultate der Kapitel I und II gründet, soll in einem Nachtrage zu der vorliegenden Arbeit ausgeführt werden.

Kapitel I.

Analytisch-geometrische Grundlagen.

§ 1.

Elementare Eigenschaften der gemeinsamen Tangenten zweier confocaler Flächen 2. Grades.

Ein System confocaler Flächen 2. Grades sei durch die Gleichung:

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\alpha-\varrho}+\frac{y^2}{\beta-\varrho}+\frac{z^2}{\gamma-\varrho}-1=0$$

mit dem Parameter ϱ gegeben, in welcher x, y, z gewöhnliche rechtwinklige Coordinaten, und α, β, γ positive reelle Constanten $(\alpha>\beta>\gamma>0)$ bedeuten.

Die *elliptischen Coordinaten* λ, μ, ν eines Punktes sind die drei bei gegebenen rechtwinkligen Coordinaten x, y, z desselben durch die Gleichung (1) bestimmten Werthe des Parameters ϱ; sie entsprechen in bekannter Weise den Ungleichungen:

$$(2) \qquad \alpha>\nu>\beta>\mu>\gamma>\lambda>-\infty.$$

Die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z drücken sich vermöge der Formeln:

$$x = \frac{\sqrt{\alpha-\lambda}\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\alpha-\nu}}{\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}}, \quad y = \frac{\sqrt{\beta-\lambda}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\beta-\nu}}{\sqrt{\beta-\gamma}\sqrt{\beta-\alpha}},$$

$$z = \frac{\sqrt{\gamma-\lambda}\sqrt{\gamma-\mu}\sqrt{\gamma-\nu}}{\sqrt{\gamma-\lambda}\sqrt{\gamma-\beta}}$$

als *symmetrische mehrdeutige Functionen* der elliptischen Coordinaten aus.

Im Anschluss hieran gilt es zunächst, neben den Coordinaten der *Punkte* des Raumes die Bestimmungsstücke einer Reihe anderer geometrischer Elemente als Functionen der elliptischen Coordinaten von analogem Charakter darzustellen. Den Mittelpunkt der Betrachtung bilden die gemeinsamen *geradlinigen Tangenten* zweier confocaler Flächen, neben welche sich von selbst gewisse näher zu definirende *Ebenen* des Raumes stellen werden.

Die 4 gemeinsamen Tangenten zweier Flächen $\varrho = \varrho_1$ und $\varrho = \varrho_2$ des Systems (1), welche durch einen beliebigen Punkt mit den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z und den elliptischen Coordinaten λ, μ, ν hindurchgehen, können als gemeinsame Erzeugende der beiden Berührungskegel vom Punkte x, y, z an die Flächen ϱ_1 und ϱ_2 durch die beiden Gleichungen:

$$(3)\quad \left(\frac{x^2}{\alpha-\varrho_\varkappa}+\frac{y^2}{\beta-\varrho_\varkappa}+\frac{z^2}{\gamma-\varrho_\varkappa}-1\right)\left(\frac{x'^2}{\alpha-\varrho_\varkappa}+\frac{y'^2}{\beta-\varrho_\varkappa}+\frac{z'^2}{\gamma-\varrho_\varkappa}-1\right)$$
$$-\left(\frac{xx'}{\alpha-\varrho_\varkappa}+\frac{yy'}{\beta-\varrho_\varkappa}+\frac{zz'}{\gamma-\varrho_\varkappa}-1\right)^2=0,$$
$$\varkappa = 1, 2,$$

in laufenden Coordinaten x', y', z' gemeinschaftlich dargestellt werden.

Um jede der 4 gemeinsamen Erzeugenden auch analytisch für sich allein definiren zu können, transformirt man die Gleichungen (3) zuerst auf ein neues Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt der Punkt x, y, z, und dessen Axen die Normalen N_λ, N_μ, N_ν der 3 durch ihn hindurchgehenden Flächen λ, μ, ν des confocalen Systems sind. Diese 3 Normalen mögen kurz als die „*Axen des Punktes* λ, μ, ν“ bezeichnet werden. Die durch die verlangte Transformation einzuführenden neuen Coordinaten X, Y, Z drücken sich durch die früheren Coordinaten x', y', z' in folgender Weise aus*):

$$(4)\quad \begin{cases} X = -P_\lambda\left(\frac{xx'}{\alpha-\lambda}+\frac{yy'}{\beta-\lambda}+\frac{zz'}{\gamma-\lambda}-1\right), \\ Y = -P_\mu\left(\frac{xx'}{\alpha-\mu}+\frac{yy'}{\beta-\mu}+\frac{zz'}{\gamma-\mu}-1\right), \\ Z = -P_\nu\left(\frac{xx'}{\alpha-\nu}+\frac{yy'}{\beta-\nu}+\frac{zz'}{\gamma-\nu}-1\right). \end{cases}$$

*) Vgl. Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, I. Th., Art. 171 (3. Auflage 1879).

Hierin bedeuten P_λ, P_μ, P_ν die Längen der vom Anfangspunkte $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$ des ursprünglichen Coordinatensystems auf die Tangentialebenen T_λ, T_μ, T_ν der Flächen λ, μ, ν im Punkte x, y, z gefällten Perpendikel.

Durch die Transformation (4) nehmen die Gleichungen (3) die folgende Form an:

$$\frac{X^2}{\varrho_\varkappa - \lambda} + \frac{Y^2}{\varrho_\varkappa - \mu} + \frac{Z^2}{\varrho_\varkappa - \nu} = 0, \qquad \varkappa = 1, 2.$$

Hieraus ergiebt sich für die 4 gemeinsamen Erzeugenden der Berührungskegel vom Punkte x, y, z an die Flächen ϱ_1 und ϱ_2:

$$X : Y : Z = \pm\sqrt{\frac{(\varrho_1-\lambda)(\varrho_2-\lambda)}{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}} : \pm\sqrt{\frac{(\varrho_1-\mu)(\varrho_2-\mu)}{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}} : \pm\sqrt{\frac{(\varrho_1-\nu)(\varrho_2-\nu)}{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}},$$

wo die 3 Terme rechter Hand in Folge der Identität:

$$(\mu-\nu)(\varrho_1-\lambda)(\varrho_2-\lambda) + (\nu-\lambda)(\varrho_1-\mu)(\varrho_2-\mu) + (\lambda-\mu)(\varrho_1-\nu)(\varrho_2-\nu) = -(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)$$

unmittelbar die Richtungscosinus*) der 4 gemeinsamen Erzeugenden mit Bezug auf die Axen des Punktes λ, μ, ν vorstellen. Die 4 verschiedenen Vorzeichencombinationen, welche diese Proportion darbietet, entsprechen den 4 gemeinsamen Tangenten der Flächen ϱ_1 und ϱ_2 durch den Punkt x, y, z.

Im Folgenden sollen zur bessern Uebersicht der Realitätsverhältnisse für die Parameterwerthe ϱ_1 und ϱ_2 die besonderen Annahmen $\varrho_1 = \lambda_0$ und $\varrho_2 = \mu_0$ gemacht und über λ_0 und μ_0 die Verfügungen $-\infty < \lambda_0 < \gamma$ und $\gamma < \mu_0 < \beta$ getroffen werden. Das erhaltene Resultat lautet dann:

Die Gleichungen der 4 gemeinsamen Tangenten, welche an das Ellipsoid $\lambda = \lambda_0$ und das einschalige Hyperboloid $\mu = \mu_0$ des confocalen Systems von einem Punkte λ, μ, ν gezogen werden können, bezogen auf die Axen des Punktes, sind in der Proportion:

$$(5)\quad X : Y : Z = \pm\sqrt{\frac{(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}} : \pm\sqrt{\frac{(\mu-\lambda_0)(\mu_0-\mu)}{(\nu-\mu)(\mu-\lambda)}} : \pm\sqrt{\frac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}}$$

enthalten, wo die Ausdrücke rechter Hand unmittelbar Richtungscosinus sind.

An diese Darstellungsweise der gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 knüpfen sich sofort einige Folgerungen an.

Durch jeden Punkt, dessen elliptische Coordinaten λ, μ, ν den Ungleichungen:

$$(6)\qquad \alpha > \nu > \beta, \qquad \mu_0 > \mu > \gamma, \qquad \lambda_0 > \lambda > -\infty$$

*) Vgl. Liouville, Liouville's Journal, 1. Serie, Bd. XII, S. 423.

entsprechen, gehen 4 *reelle*, im Allgemeinen *getrennte* Tangenten an die beiden Flächen λ_0 und μ_0; ein solcher Punkt mag ein „äusserer Punkt mit Bezug auf die beiden Flächen λ_0 und μ_0" oder kurzweg ein *„äusserer Punkt"* genannt werden.

Da sich die Richtungscosinus der Winkel, welche die 4 Tangenten in dem äusseren Punkte λ, μ, ν mit den Axen des Punktes einschliessen, nur in den Vorzeichen unterscheiden, so hat das Quadrupel dieser Tangenten die Eigenschaft, durch Spiegelung an einer jeden der 3 Tangentialebenen T_λ, T_μ, T_ν der Flächen λ, μ, ν je in sich überzugehen, oder anders ausgedrückt:

Die 4 gemeinsamen Tangenten, die an die beiden Flächen λ_0 und μ_0 von einem äusseren Punkte gelegt werden können, ordnen sich in Bezug auf jede der 3 Axen des Punktes in 2 Paare, so zwar, dass bei jeder der 3 Anordnungen die bevorzugte Axe den Winkel eines jeden Paares halbirt.

Mit Rücksicht hierauf sollen 2 durch den Punkt λ, μ, ν gehende gemeinsame Tangenten der beiden Flächen λ_0 und μ_0 *„ein Paar in Bezug auf die Axe N_λ, N_μ oder N_ν conjugirter Tangenten im Punkte λ, μ, ν"* heissen, wenn ihr Winkel resp. durch die Axe N_λ, N_μ oder N_ν halbirt wird, oder was dasselbe ist, wenn sie durch Spiegelung resp. an den Ebenen T_λ, T_μ oder T_ν in einander übergehen.

Es können also die 4 Tangenten in dem äusseren Punkte λ, μ, ν auf 3 Weisen in Paare conjugirter Tangenten gruppirt werden. Von diesen 3 Gruppirungen wird später hauptsächlich diejenige zur Anwendung gelangen, bei welcher die Normale N_λ ausgezeichnet ist; wenn daher weiterhin von *„zwei einander conjugirten Tangenten im Punkte λ, μ, ν"* ohne nähere Bestimmung gesprochen wird, so sollen immer 2 solche Tangenten gemeint sein, deren Winkel von der Normale N_λ halbirt wird.

Rückt der Punkt λ, μ, ν auf die Fläche λ_0 oder μ_0, so fallen die in Bezug auf N_λ oder bezüglich N_μ conjugirten Tangenten jeweils in eine zusammen. Alle 4 Tangenten werden für einen Punkt der Durchdringungscurve der Flächen λ_0 und μ_0 coincident.

§ 2.

Vertheilung der einfachen Wurzelfunctionen auf die äusseren Punkte und die zugehörigen Normalebenen, sowie auf die gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0.

Wenn man die Gleichungen (5) der gemeinsamen Tangenten der beiden Flächen λ_0 und μ_0 auf das ursprüngliche Coordinatensystem des § 1 mit den laufenden Coordinaten x', y', z' zurücktransformirt,

so nehmen dieselben in Folge der Relationen (4) die folgende Gestalt an:

$$(7)\quad \begin{cases} P_\mu \cdot \sqrt{\frac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}} \cdot \left(\frac{xx'}{\alpha-\mu} + \frac{yy'}{\beta-\mu} - \frac{zz'}{\mu-\gamma} - 1 \right) \\ \mp P_\nu \cdot \sqrt{\frac{(\mu-\lambda_0)(\mu_0-\mu)}{(\nu-\mu)(\mu-\lambda)}} \cdot \left(\frac{xx'}{\alpha-\nu} - \frac{yy'}{\nu-\beta} - \frac{zz'}{\nu-\gamma} - 1 \right) = 0, \\ P_\nu \cdot \sqrt{\frac{(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}} \cdot \left(\frac{xx'}{\alpha-\nu} - \frac{yy'}{\nu-\beta} - \frac{zz'}{\nu-\gamma} - 1 \right) \\ \mp P_\lambda \cdot \sqrt{\frac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}} \cdot \left(\frac{xx'}{\alpha-\lambda} + \frac{yy'}{\beta-\lambda} + \frac{zz'}{\gamma-\lambda} - 1 \right) = 0, \\ P_\lambda \cdot \sqrt{\frac{(\mu-\lambda_0)(\mu_0-\mu)}{(\nu-\mu)(\mu-\lambda)}} \cdot \left(\frac{xx'}{\alpha-\lambda} + \frac{yy'}{\beta-\lambda} + \frac{zz'}{\gamma-\lambda} - 1 \right) \\ \mp P_\mu \cdot \sqrt{\frac{(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}} \cdot \left(\frac{xx'}{\alpha-\mu} + \frac{yy'}{\beta-\mu} - \frac{zz'}{\mu-\gamma} - 1 \right) = 0. \end{cases}$$

Von den durch diese 3 Gleichungen mit ihren doppelten Vorzeichen dargestellten 6 Ebenen gehen je 3 durch jede der 4 gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 im Punkte λ, μ, ν und je 2 durch jede der 3 Axen des Punktes. Jede der 6 Ebenen enthält eine Axe und zwei in Bezug auf diese Axe conjugirte Tangenten in sich; je 2 durch dieselbe Axe gehende Ebenen enthalten alle 4 Tangenten.

Die hiernach zu den gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 im Punkte λ, μ, ν einerseits und zu den Axen des Punktes andrerseits in naher Beziehung stehenden 3 Ebenenpaare (7) sollen *„die dem Punkte zugehörigen Normalebenenpaare“* heissen und mit E_λ, E_μ, E_ν bezeichnet werden, entsprechend den Axen N_λ, N_μ, N_ν des Punktes, die sie enthalten. Die beiden Ebenen eines Paares mögen dadurch unterschieden werden, dass dem Buchstaben E das in der entsprechenden Gleichung (7) zur Verbindung beider Terme geltende Vorzeichen als oberer Index beigefügt wird. Sonach sind E_λ^- und E_λ^+ die beiden durch die 1. Gleichung (7) dargestellten Ebenen, welche die Axe N_λ und je 2 in Bezug auf diese conjugirte Tangenten enthalten. Wo im Folgenden ausschliesslich das Ebenenpaar E^λ zur Verwerthung gelangt, werden die Elemente desselben schlechthin *„die Normalebenen des Punktes λ, μ, ν“* genannt werden.

Um über die Bedeutung der Vorzeichen in den Gleichungen (7) bestimmte Angaben machen zu können, muss man über die Richtung der Hauptaxen der confocalen Flächen, der Axen der äusseren Punkte und der gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 bestimmte Festsetzungen einführen.

Die *Hauptaxen der confocalen Flächen* sollen in der gewöhnlichen Weise orientirt sein, so dass, von der positiven Hälfte der z-Axe aus

gesehen, die positive Hälfte der x-Axe in der umgekehrten Richtung des Uhrzeigers um 90^0 gedreht werden muss, um mit der positiven Hälfte der y-Axe zusammenzufallen.

Von der positiven z-Axe aus gesehen, soll ferner die positive Durchlaufungsrichtung des Hauptschnittes $\mu = \gamma$ $(z = 0)$ des Ellipsoides λ_0 als die der Richtung des Uhrzeigers entgegengesetzte erscheinen. Diese Richtung überträgt sich durch Continuität auf alle *Krümmungscurven* $\mu = \mu$ $(\gamma < \mu < \mu_0)$, welche *die Zone* $(\mu_0 \mu_0)$ *des Ellipsoides* λ_0 *zwischen den beiden Aesten der Krümmungscurve* $\mu = \mu_0$ durchziehen, und damit auf die *Axen* N_ν der äusseren Punkte des Ellipsoides λ_0. An der Zone $(\mu_0 \mu_0)$ sind 4 Felder zu unterscheiden, für deren Punkte die Coordinaten x, y bezüglich die Vorzeichen: $++$, $-+$, $--$, $+-$ haben; innerhalb des einzelnen Feldes ist, in der positiven Richtung der Krümmungscurven $\mu = \mu$ gemessen, das Differential dv positiv oder negativ, jenachdem das Product xy positiv oder negativ ist. Mit andern Worten gesagt, es nimmt die Variable ν längs der positiven Richtung der Krümmungscurven $\mu = \mu$ zu oder ab, jenachdem xy positiv oder negativ ist.

Die positive Richtung der z-Axe erscheint, wenn man auf der Aussenseite des Ellipsoides λ_0 den Hauptschnitt $\mu = \gamma$ durchläuft, beständig von der Rechten zur Linken laufend. In gleichem Sinne soll als die positive Richtung der einzelnen Stücke der *Krümmungscurven* $\nu = \nu$, welche die Zone $(\mu_0 \mu_0)$ quer durchsetzen, die von der Rechten zur Linken führende Richtung gelten. Diese Richtung überträgt sich auf die *Axen* N_μ der Punkte der Zone. In der positiven Richtung der Krümmungscurven $\nu = \nu$ gemessen, ist das Differential $d\mu$ positiv oder negativ, jenachdem für die betreffende Stelle z positiv oder negativ ist.

Die Bestimmungen, welche über die positive Richtung der Krümmungscurven $\mu = \mu$ und der Stücke der Krümmungscurven $\nu = \nu$ auf der Zone $(\mu_0 \mu_0)$ *des Ellipsoides* λ_0 getroffen wurden, sollen continuirlich auf die entsprechenden Zonen der das Ellipsoid λ_0 umschliessenden *Ellipsoide* λ übertragen werden. Die so für jeden äusseren Punkt P festgesetzte Richtung der Krümmungscurven $\nu = \nu$ und $\mu = \mu$ des betreffenden Ellipsoides λ theilt sich bezüglich den Axen N_μ und N_ν des Punktes mit, deren Anfangselemente im Punkte P mit den bezüglichen Krümmungscurven zusammenfallen.

Die *Normale* N_λ des Ellipsoides λ im Punkte P soll immer mit ihrer positiven Richtung in das Innere des Ellipsoides führen, sodass $d\lambda$, in dieser Richtung gemessen, positiv ist.

Auf einer *gemeinsamen Tangente* der Flächen λ_0 und μ_0 kann das Differential dv nur dann aus einem positiven in einen negativen Werth oder umgekehrt übergehen, wenn die Tangente die Ebene $\nu = \beta$ oder

$\nu = \alpha$ durchsetzt, da sonst die Tangente eine Fläche $\nu = \nu$ berühren müsste, was nicht möglich ist. Demnach kann die *positive Richtung der Tangente* geradezu dadurch definirt werden, dass der Werth des in dieser Richtung gemessenen Differentials dv positiv oder negativ sein soll, jenachdem an der betreffenden Stelle xy positiv oder negativ ist.

Die durch die Formeln:

$$(8) \quad x = \frac{\sqrt{\alpha-\lambda}\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\alpha-\nu}}{\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}}, \quad y = \frac{\sqrt{\beta-\lambda}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\nu-\beta}}{\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\beta-\gamma}},$$

$$z = \frac{\sqrt{\gamma-\lambda}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\nu-\gamma}}{\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}}$$

als Functionen der λ, μ, ν definirten rechtwinkligen Coordinaten erhalten ihre verschiedenen Vorzeichen durch die Zweideutigkeit der Quadratwurzeln. Für die Punkte eines festen Ellipsoides $\lambda(\lambda < \lambda_0)$ wird man den Wurzeln mit der Variablen λ ein bestimmtes, etwa das positive Vorzeichen ertheilen; das Gleiche soll allgemein für die constanten Wurzeln $\sqrt{\alpha-\beta}$, $\sqrt{\alpha-\gamma}$, $\sqrt{\beta-\gamma}$ geschehen. Aber auch die Wurzeln $\sqrt{\alpha-\mu}$, $\sqrt{\beta-\mu}$, $\sqrt{\nu-\gamma}$ dürfen für äussere Punkte ein constantes positives Vorzeichen erhalten, da sie, als stetige Functionen des Ortes betrachtet, in Folge der Ungleichungen (6) im äusseren Raume ihr Vorzeichen nicht wechseln.

Die Zweideutigkeit der Coordinaten x, y, z der äusseren Punkte des Ellipsoides λ fällt daher auf die Quadratwurzeln $\sqrt{\alpha-\nu}$, $\sqrt{\nu-\beta}$, $\sqrt{\mu-\gamma}$, die im äusseren Raume verschwinden und somit ihr Vorzeichen wechseln können. Jenachdem diese 3 Wurzeln das positive oder negative Vorzeichen erhalten, werden die Coordinaten x, y, z beziehungsweise positiv oder negativ sein. Es sollen mit Rücksicht hierauf die Wurzeln $\sqrt{\alpha-\nu}$, $\sqrt{\nu-\beta}$, $\sqrt{\mu-\gamma}$, einschliesslich der betreffenden Vorzeichen, die *„dem Punkte x, y, z zugehörigen einfachen Wurzelfunctionen“* heissen.

In analoger Weise, wie die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines Punktes P drücken sich die vom Coordinatenanfangspunkt auf die Tangentialebenen T_λ, T_μ, T_ν der Flächen λ, μ, ν im Punkte P gefällten Perpendikel P_λ, P_μ, P_ν durch die elliptischen Coordinaten des Punktes aus; es ist nämlich*):

$$(9) \quad P_\lambda = \frac{\sqrt{\alpha-\lambda}\sqrt{\beta-\lambda}\sqrt{\gamma-\lambda}}{\sqrt{\mu-\lambda}\sqrt{\nu-\lambda}}, \quad P_\mu = \frac{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\mu-\gamma}}{\sqrt{\mu-\lambda}\sqrt{\nu-\mu}},$$

$$P_\nu = \frac{\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\nu-\gamma}}{\sqrt{\nu-\lambda}\sqrt{\nu-\mu}}.$$

*) Vgl. Salmon-Fiedler a. a. O., Art. 165.

Es sollen nun hier unter $\sqrt{\alpha - \nu}$, $\sqrt{\nu - \beta}$, $\sqrt{\mu - \gamma}$ die dem Punkte P zugehörigen einfachen Wurzelfunctionen verstanden, alle übrigen Quadratwurzeln aber positiv gerechnet werden, sodass P_λ immer positiv, dagegen P_μ positiv oder negativ, jenachdem z, und P_ν positiv oder negativ ist, jenachdem xy positiv oder negativ ausfällt. In dieser Bedeutung sollen P_λ, P_μ, P_ν auch in den Substitutionsformeln (4) genommen werden, nach welchen P_λ, P_μ, P_ν die Coordinaten des Mittelpunktes M der confocalen Flächen in Bezug auf die Axen des Punktes P sind. In Uebereinstimmung mit den obigen Festsetzungen über die Richtung der Axen N_λ, N_μ, N_ν liegt dann der Punkt M immer auf der positiven Seite der Ebene $N_\mu N_\nu$, d. i. auf der Seite der positiven Halbaxe N_λ, ferner auf der positiven oder negativen Seite der Ebene $N_\nu N_\lambda$, jenachdem z positiv oder negativ, endlich auf der positiven oder negativen Seite der Ebene $N_\lambda N_\mu$, jenachdem xy positiv oder negativ ist.

Auf Grund der gemachten Festsetzungen ist die Bedeutung der Vorzeichen in den Gleichungen (7) allgemein angebbar. Die Gleichung des 1. Ebenenpaares (7), welches die Normale N_λ als Axe hat, lautete in den Coordinaten X, Y, Z:

$$\frac{\sqrt{\nu - \lambda_0}\sqrt{\nu - \mu_0}}{\sqrt{\nu - \lambda}\sqrt{\nu - \mu}} \cdot Y \mp \frac{\sqrt{\mu - \lambda_0}\sqrt{\mu_0 - \mu}}{\sqrt{\nu - \mu}\sqrt{\mu - \lambda}} \cdot Z = 0.$$

Denkt man sich auch hier den beweglichen Punkt $P = \lambda, \mu, \nu$ auf die Zone $(\mu_0 \mu_0)$ eines festen Ellipsoides λ beschränkt, so kann von den vorkommenden Quadratwurzeln nur eine einzige, $\sqrt{\mu_0 - \mu}$, als Function des Ortes λ, μ, ν betrachtet, ihr Vorzeichen wechseln. Das Gleiche würde gelten, indem der Punkt $P = \lambda$, μ, ν überhaupt in dem durch die Ungleichungen (6) bestimmten äusseren Raume sich bewegte, wenn nicht die Quadratwurzeln $\sqrt{\nu - \lambda}$ und $\sqrt{\mu - \lambda}$ beim Durchgang durch $\lambda = -\infty$ selbst unendlich würden; es hat indessen ein dabei bewirkter gleichzeitiger Vorzeichenwechsel der beiden Quadratwurzeln auf die vorliegende Gleichung keinen Einfluss. Demnach gehört das doppelte Vorzeichen in der Gleichung wesentlich zu der Quadratwurzel $\sqrt{\mu_0 - \mu}$.

Die positive Richtung der beiden gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0, welche in der Ebene E_λ^- oder E_λ^+ liegen, bildet nun nach der Definition dieser positiven Richtung mit der positiven Richtung der Normale N_ν im Punkte P immer einen spitzen Winkel; jenachdem sie daher mit N_μ einen spitzen oder stumpfen Winkel bildet, gilt in der betrachteten Gleichung das obere oder untere Vorzeichen, sofern man $\sqrt{\mu_0 - \mu}$, wie die übrigen Wurzeln, positiv denkt und das zu $\sqrt{\mu_0 - \mu}$ gehörige doppelte Vorzeichen *explicite*

schreibt. *Es gilt daher auch in der* 1. *Gleichung* (7) *das obere oder untere Vorzeichen, jenachdem die in der dargestellten Ebene E_λ enthaltenen**) *gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 mit N_μ einen spitzen oder stumpfen Winkel bilden.*

Mit Rücksicht hierauf soll unter der „*einer Normalebene E_λ zugehörigen einfachen Wurzelfunction*" der positive oder negative Werth von $\sqrt{\mu_0 - \mu}$ verstanden werden, jenachdem die in der Ebene gelegenen*) Tangenten mit der Axe N_μ einen spitzen oder stumpfen Winkel bilden. Bedeutet dann in der 1. Gleichung (7) $\sqrt{\mu_0 - \mu}$ die der darzustellenden Ebene E_λ zugehörige Wurzelfunction, so bleibt an Stelle des doppelten Zeichens $\mp$ nur das Zeichen $-$ explicite stehen.

Um die beiden durch den Punkt $P = \lambda, \mu, \nu$ gehenden und in einer der Normalebenen E_λ enthaltenen gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 ihrerseits zu unterscheiden, soll denselben je einer der beiden Werthe von $\sqrt{\lambda_0 - \lambda}$ zugeordnet werden, der positive Werth derjenigen Tangente, welche mit der Axe N_λ einen spitzen, der negative derjenigen, welche mit N_λ einen stumpfen Winkel bildet. Diese Zuordnung rechtfertigt sich mittels der 2. Gleichung (7) in analoger Weise, wie die Zuordnung der Wurzel $\sqrt{\mu_0 - \mu}$ zu den Ebenen E_λ mittels der 1. Gleichung (7).

Zusammenfassend kann man die vorstehenden Ergebnisse so aussprechen:

Einem den Ungleichungen (6) *entsprechenden Werthsystem λ, μ, ν der elliptischen Coordinaten entsprechen* 8 *äussere Punkte P, die sich durch die Vorzeichen der zugehörigen einfachen Wurzelfunctionen $\sqrt{\alpha - \nu}$, $\sqrt{\nu - \beta}$, $\sqrt{\mu - \gamma}$ unterscheiden.*

Zu jedem dieser 8 *Punkte gehören zwei Normalebenen E_λ, welche durch die Verschiedenheit des Vorzeichens der zugehörigen einfachen Wurzelfunction $\sqrt{\mu_0 - \mu}$ auseinander zu halten sind.*

In jeder der beiden Normalebenen liegen zwei in dem betreffenden Punkte einander conjugirte Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0, welche durch das Vorzeichen der zugehörigen einfachen Wurzelfunction $\sqrt{\lambda_0 - \lambda}$ charakterisirt werden.

§ 3.

Die homogenen Coordinaten der beiden Normalebenen eines Punktes als Functionen seiner elliptischen Coordinaten.

Die 1. Gleichung (7) der dem Punkte $P = x, y, z = \lambda, \mu, \nu$ zugehörigen Normalebenen E_λ lautet, wenn man nach dem in § 2 ge-

*) In einer Ebene des Raumes liegen im Allgemeinen 4 gemeinsame Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0; es ist aber hier nur von der Anordnung der 4 *durch einen gegebenen Punkt* gehenden Tangenten die Rede.

troffenen Uebereinkommen nur das obere der beiden Vorzeichen explicite stehen lässt, ferner in homogener Schreibweise $x : t$, $y : t$, $z : t$ für x, y, z einführt und nach den laufenden Coordinaten x', y', z', t' ordnet:

$$
\begin{aligned}
&\left\{ \frac{\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}}{\sqrt{\nu-\lambda}\sqrt{\nu-\mu}} \cdot P_\mu \cdot \frac{x}{\alpha-\mu} - \frac{\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{\sqrt{\nu-\mu}\sqrt{\mu-\lambda}} \cdot P_\nu \cdot \frac{x}{\alpha-\nu} \right\} x' \\
&+\left\{ \frac{\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}}{\sqrt{\nu-\lambda}\sqrt{\nu-\mu}} \cdot P_\mu \cdot \frac{y}{\beta-\mu} + \frac{\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{\sqrt{\nu-\mu}\sqrt{\mu-\lambda}} \cdot P_\nu \cdot \frac{y}{\nu-\beta} \right\} y' \\
&+\left\{ -\frac{\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}}{\sqrt{\nu-\lambda}\sqrt{\nu-\mu}} \cdot P_\mu \cdot \frac{z}{\mu-\gamma} + \frac{\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{\sqrt{\nu-\mu}\sqrt{\mu-\lambda}} \cdot P_\nu \cdot \frac{z}{\nu-\gamma} \right\} z' \\
&+\left\{ -\frac{\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}}{\sqrt{\nu-\lambda}\sqrt{\nu-\mu}} \cdot P_\mu \cdot t + \frac{\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{\sqrt{\nu-\mu}\sqrt{\mu-\lambda}} \cdot P_\nu \cdot t \right\} t' = 0.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Die in Klammern geschlossenen Coefficienten von x', y', z', t' mögen als die homogenen Coordinaten der Ebene E_λ mit ξ, η, ζ, τ bezeichnet werden, so dass die Gleichung der Ebene die Form erhält:

$$\xi \cdot x' + \eta \cdot y' + \zeta \cdot z' + \tau \cdot t' = 0, \tag{11}$$

Die Formeln (8) und (9) gestatten nun die in der Gleichung (10) gegebenen Verhältnisse der ξ, η, ζ, τ durch die elliptischen Coordinaten des Punktes P darzustellen. Indem man dabei zur Erleichterung für spätere Zwecke gewisse Factoren hinzufügt, die auf die Verhältnisse der ξ, η, ζ, τ ohne Einfluss sind, kann man das erhaltene Resultat so formuliren:

Die homogenen Coordinaten ξ, η, ζ, τ der beiden Normalebenen E_λ im Punkte $P = x, y, z, t = \lambda, \mu, \nu$ drücken sich, mit einem Proportionalitätsfactor $\varkappa$, in den elliptischen Coordinaten des Punktes folgendermaassen aus:

$$
\begin{aligned}
&\varkappa \cdot \sqrt{\alpha-\lambda_0} \cdot \xi = + \frac{\sqrt{\alpha-\lambda_0}\sqrt{\alpha-\lambda}}{\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}} \times \\
&\frac{\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0} - \sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}}, \\
&\varkappa \cdot \sqrt{\beta-\lambda_0} \cdot \eta = + \frac{\sqrt{\beta-\lambda_0}\sqrt{\beta-\lambda}}{\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\beta-\gamma}} \times \\
&\frac{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0} + \sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}}, \\
&\varkappa \cdot \sqrt{\gamma-\lambda_0} \cdot \zeta = - \frac{\sqrt{\gamma-\lambda_0}\sqrt{\gamma-\lambda}}{\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}} \times \\
&\frac{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0} - \sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}}, \\
&\varkappa \cdot \tau = \\
&- \frac{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0} - \sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}}.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Hier bedeuten $\sqrt{\alpha - \nu}$, $\sqrt{\nu - \beta}$, $\sqrt{\mu - \gamma}$ *die dem Punkte* P *zugehörigen einfachen Wurzelfunctionen und* $\sqrt{\mu_0 - \mu}$ *die der einzelnen Ebene* E_λ *zugehörige einfache Wurzelfunction, während alle übrigen Wurzeln positiv gelten.*

Die Ebenencoordinaten ξ, η, ζ, τ erscheinen hiernach als *mehrdeutige symmetrische Functionen der beiden elliptischen Coordinaten* μ *und* ν. Die besondere Stellung der elliptischen Coordinate λ hat ihren Grund in der Auswahl des durch die Axe N_λ gehenden Ebenenpaares E_λ unter den 3 dem Punkte P zugehörigen Ebenenpaaren E_λ, E_μ, E_ν.

Zu einem Werthetripel λ, μ, ν gehören im Allgemeinen 8 Werthsysteme der 3 in (8) definirten Verhältnisse der x, y, z, t, dagegen 16 Werthsysteme der 3 in (12) definirten Verhältnisse der ξ, η, ζ, τ. Die ersteren sind durch die Vorzeichen der einfachen Wurzelfunctionen $\sqrt{\alpha - \nu}$, $\sqrt{\nu - \beta}$, $\sqrt{\mu - \gamma}$, die letzteren durch diese und überdies durch das Vorzeichen der Wurzelfunction $\sqrt{\mu_0 - \mu}$ unterschieden.

Für die Punkte des einschaligen Hyperboloides μ_0 fallen die beiden zugehörigen Normalebenen E_λ in die Tangentialebene T_μ des Hyperboloides zusammen, und das analytische Unterscheidungsmoment, das Vorzeichen von $\sqrt{\mu_0 - \mu}$, verschwindet.

Da die dem Punkte x, y, z, t zugehörigen Normalebenen E_λ beide ihrer Definition nach den Punkt enthalten, muss die Bedingung (11) der vereinigten Lage von Punkt und Ebene für $x', y', z', t' = x, y, z, t$ identisch erfüllt sein. In der That liefert die Substitution der Werthe (8) und (12) in die Gleichung (11) eine in Bezug auf λ, μ, ν, unabhängig vom Vorzeichen von $\sqrt{\mu_0 - \mu}$, *identische* Gleichung.

§ 4.

Die homogenen Liniencoordinaten der gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 als Functionen der elliptischen Coordinaten des Berührungspunktes mit der Fläche λ_0.

Zwei einander conjugirte gemeinsame Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0, welche durch den äusseren Punkt $P = x, y, z = \lambda, \mu, \nu$ gehen und in einer der beiden Ebenen E_λ liegen, fallen in *eine* Tangente zusammen, wenn der Punkt P auf die Fläche des Ellipsoides zu liegen kommt. Die beiden in einem Punkte P der Fläche λ_0 noch vorhandenen getrennten Tangenten erscheinen daher als Schnittlinien der Tangentialebene des Ellipsoides λ_0 in dem Punkte x, y, z mit den beiden zugehörigen Normalebenen E_{λ_0}. Als solche stellen sich diese Tangenten durch die Gleichungen:

$$X = 0, \qquad \frac{\sqrt{\nu - \mu_0}}{\sqrt{\nu - \mu}} \cdot Y - \frac{\sqrt{\mu_0 - \mu}}{\sqrt{\nu - \mu}} \cdot Z = 0$$

in laufenden Coordinaten X, Y, Z (vgl. § 1, 5) oder:

$$\frac{xx'}{\alpha-\lambda_0}+\frac{yy'}{\beta-\lambda_0}+\frac{zz'}{\gamma-\lambda_0}-1=0,$$

$$\frac{\sqrt{\nu-\mu_0}}{\sqrt{\nu-\mu}}\cdot P_\mu\left(\frac{xx'}{\alpha-\mu}+\frac{yy'}{\beta-\mu}-\frac{zz'}{\mu-\gamma}-1\right)$$

$$-\frac{\sqrt{\mu_0-\mu}}{\sqrt{\nu-\mu}}\cdot P_\nu\left(\frac{xx'}{\alpha-\nu}-\frac{yy'}{\nu-\beta}-\frac{zz'}{\nu-\gamma}-1\right)=0$$

in laufenden Coordinaten x', y', z' dar; dabei ist $\sqrt{\mu_0-\mu}$ die der Ebene E_{λ_0}, in der die einzelne Tangente liegt, zugehörige einfache Wurzelfunction.

Durch Combination beider Gleichungen ergiebt sich:

$$\sqrt{\nu-\mu_0}\cdot P_\mu(\mu-\lambda_0)\left\{\frac{xx'}{(\alpha-\lambda_0)(\alpha-\mu)}+\frac{yy'}{(\beta-\lambda_0)(\beta-\mu)}-\frac{zz'}{(\gamma-\lambda_0)(\mu-\gamma)}\right\}$$

$$-\sqrt{\mu_0-\mu}\cdot P_\nu(\nu-\lambda_0)\left\{\frac{xx'}{(\alpha-\lambda_0)(\alpha-\nu)}-\frac{yy'}{(\beta-\lambda_0)(\nu-\beta)}-\frac{zz'}{(\gamma-\lambda_0)(\nu-\gamma)}\right\}=0,$$

und wenn man nach x', y', z' ordnet und die Werthe (8) und (9) der x, y, z und der P_μ, P_ν einsetzt:

$$px'+qy'+rz'=0, \tag{13}$$

wo die Verhältnisse der Coefficienten p, q, r, mit einem Proportionalitätsfactor $\varkappa$, durch folgende *symmetrische Functionen der beiden elliptischen Coordinaten μ und ν* gegeben werden können:

$$(14)\quad\begin{cases}\varkappa\cdot\sqrt{\alpha-\lambda_0}\cdot p=+\dfrac{\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}-\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\mu_0-\lambda_0}}\\ \varkappa\cdot\sqrt{\beta-\lambda_0}\cdot q=+\dfrac{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}+\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\beta-\gamma}\sqrt{\mu_0-\lambda_0}}\\ \varkappa\cdot\sqrt{\gamma-\lambda_0}\cdot r=-\dfrac{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}-\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}\sqrt{\mu_0-\lambda_0}}.\end{cases}$$

Die in Rücksicht auf spätere Zwecke den Ausdrücken rechter Hand zugefügten gemeinsamen Factoren sind auf die Verhältnisse der p, q, r ohne Einfluss. Unter $\sqrt{\alpha-\nu}$, $\sqrt{\nu-\beta}$, $\sqrt{\mu-\gamma}$ sind, wie oben, die dem Punkte P zugehörigen Wurzelfunctionen, unter $\sqrt{\mu_0-\mu}$ die der Ebene E_{λ_0}, welche die betrachtete Tangente enthält, zugehörige Wurzelfunction verstanden; alle übrigen Wurzeln sind positiv.

Das Resultat ist zunächst dies:

Eine gemeinsame Tangente der Flächen λ_0 und μ_0 in einem Punkte $P = x, y, z = \lambda_0, \mu, \nu$ der ersteren Fläche ist in laufenden Coordinaten x', y', z' durch die beiden Gleichungen:

$$\frac{xx'}{\alpha-\lambda_0}+\frac{yy'}{\beta-\lambda_0}+\frac{zz'}{\gamma-\lambda_0}-1=0, \tag{15}$$

$$px'+qy'+rz'=0 \tag{13}$$

dargestellt, wo x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes P, p, q, r aber die in (14) *definirten Functionen seiner elliptischen Coordinaten sind. Die dargestellte Tangente bildet mit der Krümmungscurve $\nu = \nu$ des Ellipsoides λ_0 einen spitzen oder stumpfen Winkel, jenachdem in* (14) $\sqrt{\mu_0-\mu}$ *positiv oder negativ ist.*

Die Gleichung (13) kann als Gleichung eines *Ebenenbündels* mit den homogenen Coordinaten p, q, r betrachtet werden. Jedem Punkte P der Fläche λ_0 gehören 2 Ebenen dieses Bündels zu, welche die beiden gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 in dem Punkte enthalten. Der Punkt P liegt in jeder der beiden ihm in diesem Sinne zugehörigen Ebenen des Bündels, und entsprechend ist die Gleichung (13) *identisch* erfüllt, wenn man darin für x', y', z' die Werthe (8) der Coordinaten des Punktes P (mit $\lambda = \lambda_0$) und für p, q, r die Werthe (14) substituirt, gleichviel ob daselbst $\sqrt{\mu_0-\mu}$ positiv oder negativ ist.

Durch die elliptischen Coordinaten μ, ν des Punktes P der Fläche λ_0 ist die Ebene p, q, r achtdeutig bestimmt; denn von den 16 Combinationen der Vorzeichen der 4 Wurzelfunctionen $\sqrt{\alpha-\nu}$, $\sqrt{\nu-\beta}$, $\sqrt{\mu-\gamma}$, $\sqrt{\mu_0-\mu}$ geben die durch gleichzeitige Umkehr der 4 Vorzeichen auseinander hervorgehenden Combinationen dieselbe Ebene. Geometrisch entspricht diesem Umstande, dass die 16 gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0, in 8 Punkten der Fläche λ_0 mit gleichen μ, ν, paarweise in derselben Ebene p, q, r liegen; jedoch so, dass 2 Tangenten, die in demselben Punkte berühren, in verschiedenen Ebenen liegen, und 2 Tangenten, die in derselben Ebene liegen, in verschiedenen Punkten berühren.

Für die Punkte $\lambda = \lambda_0$, $\mu = \mu_0$, $\nu = \nu$ der Durchdringungscurve der beiden Flächen λ_0 und μ_0 verschwinden die zweiten Glieder im Zähler der Ausdrücke (14), und damit die Unterscheidung der beiden einem Punkte x, y, z im Allgemeinen zugehörigen zwei Ebenen p, q, r, entsprechend dem Umstande, dass in den Punkten der Durchdringungscurve die beiden Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 zusammenfallen.

Die Darstellung (13), (15) der gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 vermittelt den Uebergang zu den *Plücker'schen Liniencoordinaten dieser Tangenten.*

Die Tangenten bilden eine Liniencongruenz 4. Ordnung und 4. Classe. In den 6 homogenen Strahlencoordinaten p_{ik} der geraden Linie, die sich als Functionen zweier beliebiger Punkte x, y, z und x', y', z' der Linie in der bekannten Weise:

$$(16)\qquad \begin{cases} p_{12} = x - x', & p_{13} = y - y', & p_{14} = z - z', \\ p_{34} = yz' - zy', & p_{42} = zx' - xz', & p_{23} = xy' - yx' \end{cases}$$

ausdrücken, stellt sich die Liniencongruenz der gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0, zuzüglich der zwischen den Liniencoordinaten bestehenden Identität, durch folgende 3 Gleichungen dar:

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0,$$

$$(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{p_{12}^2}{\alpha-\lambda_0} + \dfrac{p_{13}^2}{\beta-\lambda_0} + \dfrac{p_{14}^2}{\gamma-\lambda_0} - \dfrac{p_{34}^2}{(\beta-\lambda_0)(\gamma-\lambda_0)} - \dfrac{p_{42}^2}{(\gamma-\lambda_0)(\alpha-\lambda_0)} - \dfrac{p_{23}^2}{(\alpha-\lambda_0)(\beta-\lambda_0)} = 0, \\ \dfrac{p_{12}^2}{\alpha-\mu_0} + \dfrac{p_{13}^2}{\beta-\mu_0} - \dfrac{p_{14}^2}{\mu_0-\gamma} + \dfrac{p_{34}^2}{(\beta-\mu_0)(\mu_0-\gamma)} + \dfrac{p_{42}^2}{(\mu_0-\gamma)(\alpha-\mu_0)} - \dfrac{p_{23}^2}{(\alpha-\mu_0)(\beta-\mu_0)} = 0. \end{cases}$$

Um die Coordinaten p_{ik} der Congruenzstrahlen von den elliptischen Coordinaten μ, ν der Berührungspunkte mit der Fläche λ_0 abhängig zu machen, entnimmt man zunächst aus (13), (15) für die Verhältnisse der Liniencoordinaten die Werthe:

$$\varkappa' \cdot p_{12} = \frac{yr}{\beta-\lambda_0} - \frac{zq}{\gamma-\lambda_0}, \qquad \varkappa' \cdot p_{34} = p,$$

$$\varkappa' \cdot p_{13} = \frac{zp}{\gamma-\lambda_0} - \frac{xr}{\alpha-\lambda_0}, \qquad \varkappa' \cdot p_{42} = q,$$

$$\varkappa' \cdot p_{14} = \frac{xq}{\alpha-\lambda_0} - \frac{yp}{\beta-\lambda_0}, \qquad \varkappa' \cdot p_{23} = r,$$

wo $\varkappa'$ einen Proportionalitätsfactor bedeutet. Indem man alsdann die Coordinaten x, y, z des Berührungspunktes und die Coordinaten p, q, r der den Strahl enthaltenden Ebene des Bündels von den μ, ν abhängig ausdrückt, erhält man die gewünschte Form der Liniencoordinaten. Das Resultat kann in folgender Form ausgesprochen werden:

Sind μ, ν die elliptischen Coordinaten des Berührungspunktes einer gemeinsamen Tangente der Flächen λ_0 und μ_0 mit der Fläche λ_0, so hängen die Liniencoordinaten der Tangente von μ, ν in dieser Weise ab:

$$(18)\qquad \begin{cases} \varkappa \cdot \dfrac{p_{12}}{\sqrt{\alpha-\lambda_0}} = + \dfrac{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0} + \sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\mu_0-\lambda_0}}, \\ \varkappa \cdot \dfrac{p_{13}}{\sqrt{\beta-\lambda_0}} = - \dfrac{\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0} - \sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\beta-\gamma}\sqrt{\mu_0-\lambda_0}}, \\ \varkappa \cdot \dfrac{p_{14}}{\sqrt{\gamma-\lambda_0}} = \dfrac{\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0} + \sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}\sqrt{\mu_0-\lambda_0}}, \\ \varkappa \cdot \dfrac{p_{34}}{\sqrt{\beta-\lambda_0}\sqrt{\gamma-\lambda_0}} = - \dfrac{\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0} - \sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\mu_0-\lambda_0}} \end{cases}$$

$$(18)\quad \begin{cases} \varkappa \cdot \dfrac{p_{42}}{\sqrt{\gamma-\lambda_0}\sqrt{\alpha-\lambda_0}} = -\dfrac{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}+\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\beta-\gamma}\sqrt{\mu_0-\lambda_0}} \\ \varkappa \cdot \dfrac{p_{23}}{\sqrt{\alpha-\lambda_0}\sqrt{\beta-\lambda_0}} = +\dfrac{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}-\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}\sqrt{\mu_0-\lambda_0}} \end{cases}$$

Hier ist $\varkappa$ ein Proportionalitätsfactor, und bedeuten $\sqrt{\alpha-\nu}$, $\sqrt{\nu-\beta}$, $\sqrt{\mu-\gamma}$ die dem Berührungspunkte zugehörigen einfachen Wurzelfunctionen, und ist $\sqrt{\mu_0-\mu}$ positiv oder negativ, jenachdem die positive Richtung des Strahles p_{ik} mit der positiven Richtung der Krümmungscurve $\nu = \nu$ einen spitzen oder stumpfen Winkel bildet.

Die einem Werthepaare μ, ν entsprechenden 16 Tangenten erhalten ihre Liniencoordinaten p_{ik}, indem jeweils in den Definitionsgleichungen (18) die 16 Vorzeichencombinationen der 4 Quadratwurzeln $\sqrt{\alpha-\nu}$, $\sqrt{\nu-\beta}$, $\sqrt{\mu-\gamma}$, $\sqrt{\mu_0-\mu}$ benutzt werden.

§ 5.

Differentialgleichungen der gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0.

Die Gleichungen (5) des § 1, welche in den §§ 2—4 zur Darstellung der *algebraischen Bestimmungsstücke* der gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 durch elliptische Coordinaten benutzt wurden, führen andrerseits auf die *Differentialgleichungen* der bezeichneten Tangenten in elliptischen Coordinaten.*)

Sei auf einer der 4 vom Punkte $P = x, y, z = \lambda, \mu, \nu$ an die Flächen λ_0 und μ_0 gelegten Tangenten ein Element dS durch den Punkt λ, μ, ν und den in der positiven Richtung (vgl. § 2) der Tangente folgenden Nachbarpunkt $\lambda + d\lambda$, $\mu + d\mu$, $\nu + d\nu$ abgegrenzt.

Die Proportion (5), der die Coordinaten X, Y, Z der Punkte der Tangente genügen, muss im Besonderen erfüllt werden, wenn man für X, Y, Z die Projectionen $d\sigma_\lambda$, $d\sigma_\mu$, $d\sigma_\nu$ des Elementes dS auf die Axen N_λ, N_μ, N_ν des Punktes P substituirt. Diese Projectionen hängen von den Differentialen $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ in folgender Weise ab:**)

$$d\sigma_\lambda = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\mu-\lambda}\sqrt{\nu-\lambda}\cdot d\lambda}{\sqrt{\alpha-\lambda}\sqrt{\beta-\lambda}\sqrt{\gamma-\lambda}}, \qquad d\sigma_\mu = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\nu-\mu}\sqrt{\mu-\lambda}\cdot d\mu}{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\mu-\gamma}},$$

$$d\sigma_\nu = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\nu-\lambda}\sqrt{\nu-\mu}\cdot d\nu}{\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\nu-\gamma}},$$

*) Eine Andeutung hierüber findet sich bei Liouville, Liouville's Journal, Bd. XII (1847), S. 255.

**) Vergl. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, herausgegeben von Clebsch, S. 205, 210.

wo wiederum unter $\sqrt{\alpha - \nu}$, $\sqrt{\nu - \beta}$, $\sqrt{\mu - \gamma}$ die dem Punkte P zugehörigen einfachen Wurzelfunctionen zu verstehen sind, alle übrigen Wurzeln aber positiv gelten sollen.

Es bleibt dann in Uebereinstimmung mit den Anschauungen des § 2 für äussere Punkte des Ellipsoides $\lambda\, d\sigma_\nu$ immer positiv; dagegen wird $d\sigma_\mu$ positiv oder negativ, jenachdem $d\mu$ und $\sqrt{\mu - \gamma}$ gleiches oder verschiedenes Vorzeichen haben, und stimmt das Vorzeichen von $d\sigma_\lambda$ mit dem von $d\lambda$ überein, d. h. sind $d\sigma_\lambda$ und $d\lambda$ gleichzeitig von positivem oder von negativem Werthe.

Indem man bei der dreigliedrigen Proportion (5) die doppelten Vorzeichen, die nur an 2 Stellen beibehalten zu werden brauchen, im Sinne des § 2 in die Wurzeln $\sqrt{\lambda_0 - \lambda}$ und $\sqrt{\mu_0 - \mu}$ hineingelegt denkt und alle andern Wurzeln positiv nimmt, gewinnt die Proportion mit Einsetzung der Werthe von $d\sigma_\lambda$, $d\sigma_\mu$, $d\sigma_\nu$ die Form:

$$\frac{\sqrt{\mu-\lambda}\sqrt{\nu-\lambda}\cdot d\lambda}{\sqrt{\alpha-\lambda}\sqrt{\beta-\lambda}\sqrt{\gamma-\lambda}} : \frac{\sqrt{\nu-\mu}\sqrt{\mu-\lambda}\cdot d\mu}{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\mu-\gamma}} : \frac{\sqrt{\nu-\lambda}\sqrt{\nu-\mu}\cdot d\nu}{\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\nu-\gamma}}$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda_0-\lambda}\sqrt{\mu_0-\lambda}}{\sqrt{\mu-\lambda}\sqrt{\nu-\lambda}} : \frac{\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{\sqrt{\nu-\mu}\sqrt{\mu-\lambda}} : \frac{\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}}{\sqrt{\nu-\lambda}\sqrt{\nu-\mu}}.$$

Hier unterscheidet das Vorzeichen von $\sqrt{\mu_0 - \mu}$ die beiden Paare in Bezug auf N_λ conjugirter Tangenten im Punkte P, und das Vorzeichen von $\sqrt{\lambda_0 - \lambda}$ die beiden Tangenten des einzelnen Paares. Mit den Abkürzungen:

$$\Lambda' = \sqrt{\alpha - \lambda}\ \sqrt{\beta - \lambda}\ \sqrt{\gamma - \lambda}\ \sqrt{\lambda_0 - \lambda}\ \sqrt{\mu_0 - \lambda},$$
$$\mathsf{M}' = \sqrt{\alpha - \mu}\ \sqrt{\beta - \mu}\ \sqrt{\mu - \gamma}\ \sqrt{\mu - \lambda_0}\ \sqrt{\mu_0 - \mu},$$
$$\mathsf{N}' = \sqrt{\alpha - \nu}\ \sqrt{\nu - \beta}\ \sqrt{\nu - \gamma}\ \sqrt{\nu - \lambda_0}\ \sqrt{\nu - \mu_0}$$

schreibt sich die Proportion in der einfacheren Gestalt:

$$\frac{d\lambda}{\Lambda'} : \frac{d\mu}{\mathsf{M}'} : \frac{d\nu}{\mathsf{N}'} = \nu - \mu : \nu - \lambda : \mu - \lambda.$$

Da für äussere Punkte die rechts stehenden Differenzen immer positiv sind, dasselbe aber von $\frac{d\nu}{\mathsf{N}'}$ gilt, so müssen auch $\frac{d\lambda}{\Lambda'}$ und $\frac{d\mu}{\mathsf{M}'}$ positiv ausfallen.

Das Resultat ist somit dieses:

Wählt man für einen äusseren Punkt $P = \lambda, \mu, \nu$ eine der beiden Normalebenen $E_\lambda^{\mp}$ und in dieser eine der beiden conjugirten gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 aus, so lauten die Differentialgleichungen dieser Tangente T:

$$\frac{d\lambda}{\Lambda'} : \frac{d\mu}{\mathsf{M}'} : \frac{d\nu}{\mathsf{N}'} = \nu - \mu : \nu - \lambda : \mu - \lambda,$$

wo in den Producten Λ', M', N' $\sqrt{\alpha - \nu}$, $\sqrt{\nu - \beta}$, $\sqrt{\mu - \gamma}$ *die dem*

Punkte P, $\sqrt{\mu_0 - \mu}$ die der Ebene E_λ und $\sqrt{\lambda_0 - \lambda}$ die der Tangente zugehörigen einfachen Wurzelfunctionen sind, und alle andern Factoren positiv gelten.

Geht man von den *Producten* Λ', M', N' *der einfachen Wurzelfunctionen* zu den *zusammengesetzten Wurzelfunctionen:*

$$\Lambda = \sqrt{(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)(\gamma - \lambda)(\lambda_0 - \lambda)(\mu_0 - \lambda)},$$
$$\mathsf{M} = \sqrt{(\alpha - \mu)(\beta - \mu)(\mu - \gamma)(\mu - \lambda_0)(\mu_0 - \mu)},$$
$$\mathsf{N} = \sqrt{(\alpha - \nu)(\nu - \beta)(\nu - \gamma)(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu_0)},$$

über und schreibt die Differentialgleichungen der Tangente in der Form:

$$\frac{d\lambda}{\Lambda} : \frac{d\mu}{\mathsf{M}} : \frac{d\nu}{\mathsf{N}} = \nu - \mu : \nu - \lambda : \mu - \lambda, \tag{19}$$

so hat man die Vorzeichen der zusammengesetzten Wurzelfunctionen allgemein so zu bestimmen, dass die Differentiale $\frac{d\lambda}{\Lambda}$, $\frac{d\mu}{\mathsf{M}}$, $\frac{d\nu}{\mathsf{N}}$ alle positiv oder alle negativ ausfallen. Aus der erhaltenen Proportion gehen nun in Folge der Identitäten:

$$(\nu - \mu) - (\nu - \lambda) + (\mu - \lambda) = 0,$$
$$\lambda(\nu - \mu) - \mu(\nu - \lambda) + \nu(\mu - \lambda) = 0$$

die hyperelliptischen Differentialgleichungen hervor:

$$\begin{cases} \frac{d\lambda}{\Lambda} - \frac{d\mu}{\mathsf{M}} + \frac{d\nu}{\mathsf{N}} = 0, \\ \frac{\lambda d\lambda}{\Lambda} - \frac{\mu d\mu}{\mathsf{M}} + \frac{\nu d\nu}{\mathsf{N}} = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Es sind dies also die Differentialgleichungen der gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 in elliptischen Coordinaten.

§ 6.

Vertheilung der zusammengesetzten Wurzelfunctionen auf die äusseren Punkte.

Die Fortschreitungsrichtung von einem Punkte $P = \lambda, \mu, \nu$ zu einem Nachbarpunkte $\lambda + d\lambda$, $\mu + d\mu$, $\nu + d\nu$ giebt nach § 5 die Richtung einer gemeinsamen Tangente T an die Flächen λ_0 und μ_0, wenn die Differentiale $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ den Gleichungen (20) mit einer der 4 verschiedenen Combinationen in den Vorzeichen der Verhältnisse der Quadratwurzeln Λ, M, N genügen. In diesem Sinne gehört jedem durch seine Endpunkte λ, μ, ν und $\lambda + d\lambda$, $\mu + d\mu$, $\nu + d\nu$ charakterisirten Linienelement dS einer solchen Tangente T eine bestimmte Combination in den Vorzeichen der Verhältnisse der Quadratwurzeln

Λ, M, N zu. Man kann aber darüber hinaus dem Elemente dS eine bestimmte Combination der Vorzeichen der Quadratwurzeln Λ, M, N selbst zuordnen.

Nach den Festsetzungen des § 2 haben nämlich die Differentiale $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$, von einem äusseren Punkte P in der positiven Richtung einer Tangente T gemessen, durchaus bestimmte Vorzeichen, d. h. es ist völlig bestimmt, ob ein jedes derselben für das Element dS einen positiven oder negativen Werth hat. Diejenigen Werthe der Quadratwurzeln Λ, M, N, welche ihrem Vorzeichen nach bezüglich mit $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ übereinstimmen, sollen *die dem Elemente dS* oder auch *die dem Punkte λ, μ, ν, als einem Punkte der Tangente T, zugehörigen zusammengesetzten Wurzelfunctionen* heissen.

Der Zusammenhang dieser zusammengesetzten mit den früheren einfachen Wurzelfunctionen ist nach § 5 ersichtlich. Es hat nämlich N für das Element dS das Vorzeichen des Productes der dem Punkte P zugehörigen einfachen Wurzelfunctionen $\sqrt{\alpha - \nu}$ und $\sqrt{\nu - \beta}$; es hat M das Vorzeichen des Productes der dem Punkte P zugehörigen Wurzelfunction $\sqrt{\mu - \gamma}$ und der der Ebene E_λ der Tangente T zugehörigen Wurzelfunction $\sqrt{\mu_0 - \mu}$, endlich Λ das Vorzeichen der der Tangente T selbst zugehörigen Wurzelfunction $\sqrt{\lambda_0 - \lambda}$. Durch die 5 *einfachen Wurzelfunctionen* $\sqrt{\alpha - \nu}$, $\sqrt{\nu - \beta}$, $\sqrt{\mu - \gamma}$, $\sqrt{\mu_0 - \mu}$, $\sqrt{\lambda_0 - \lambda}$ der elliptischen Coordinaten λ, μ, ν, welche der Vereinigung dreier geometrischer Elemente: eines Punktes P, einer seiner beiden Normalebenen E_λ und einer der beiden in dieser enthaltenen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 durch P, eigenthümlich sind, sind also die dem Punkte P, als einem Punkte der Tangente T, zugehörigen *zusammengesetzten Wurzelfunctionen* völlig bestimmt; aber nicht umgekehrt. In der That gehören zu einem Werthetripel λ, μ, ν 8 Punkte mit je 4 Tangenten T; um die 32 Tangenten zu unterscheiden, müssen an Stelle der 8 Vorzeichencombinationen der zusammengesetzten Wurzelfunctionen Λ, M, N die 32 Vorzeichencombinationen der 5 einfachen Wurzelfunctionen eintreten. Da indessen die zusammengesetzten Wurzelfunctionen in Kapitel II zur Definition der Irrationalität eines hyperelliptischen Gebildes nöthig sein werden, soll die Vertheilung derselben im äusseren Raume noch kurz betrachtet werden.

Lässt man den Anfangspunkt $P = \lambda, \mu, \nu$ des Elementes dS längs der betreffenden Tangente T stetig fortlaufen, so werden sich die den successiven Elementen zugehörigen Wurzelfunctionen Λ, M, N stetig ändern und ihre Vorzeichen beibehalten, solange keines der Differentiale $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ sein Vorzeichen wechselt, d. h. aus einem positiven in einen negativen Werth oder umgekehrt übergeht.

Es liegen aber, wie aus der Natur des confocalen Systems (1)

ersichtlich ist, auf jeder Tangente 6 Punkte, in denen ein derartiger Zeichenwechsel stattfindet, nämlich die beiden Berührungspunkte der Tangente mit den Flächen λ_0 und μ_0 und die 4 Schnittpunkte der Tangente mit den Ebenen des Coordinatentetraeders, auf welches die Gleichung (1) bezogen ist. Diese 6 Punkte sind durch die Werthe: $\lambda = -\infty$, $\lambda = \lambda_0$; $\mu = \gamma$, $\mu = \mu_0$; $\nu = \beta$, $\nu = \alpha$ je einer ihrer elliptischen Coordinaten charakterisirt, und es bilden die Werthepaare: $-\infty\ \lambda_0$, $\gamma\ \mu_0$, $\beta\ \alpha$ nach (6) zugleich die Grenzen, innerhalb deren die Coordinaten λ, μ, ν eines Punktes einer reellen Tangente der beiden Flächen λ_0 und μ_0 beziehungsweise sich bewegen.

Wenn also der Anfangspunkt $P = \lambda, \mu, \nu$ des Elementes dS der Tangente T die ganze im Unendlichen geschlossen gedachte Tangente durchläuft, so wechselt jede der zugehörigen Wurzelfunctionen Λ, M, N, *indem sie durch 0 oder ∞ hindurchgeht, zweimal das Vorzeichen.*

Nimmt daher auch jede der Variablen λ, μ, ν längs der Tangente jeden der ihr durch die Ungleichungen (6) zugewiesenen Werthe je *zweimal* an, so *unterscheiden sich* doch zwei Stellen, in denen die Variable den *nämlichen* Werth hat, durch das *Vorzeichen* der gleichbezeichneten Quadratwurzel Λ, M oder N, welche den Stellen zugehört. Was im Besonderen das Verhalten der Quadratwurzel Λ angeht, der späterhin eine ausgezeichnete Rolle zufallen wird, so wird jede gemeinsame Tangente der Flächen λ_0 und μ_0 durch ihren Berührungspunkt mit λ_0 einerseits und ihren Durchschnitt mit der unendlich fernen Ebene andrerseits in 2 Hälften getheilt; auf der einen, der vom Unendlichen her auf den Berührungspunkt zulaufenden Hälfte, ist Λ positiv, auf der andern, vom Berührungspunkt fortlaufenden negativ. Um dem gewöhnlichen Gebrauche zu folgen, nach welchem die vom Nullpunkt fortlaufende Hälfte einer Geraden positiv genannt wird, hat man also *an jeder gemeinsamen Tangente der Flächen λ_0 und μ_0 eine positive und eine negative Hälfte zu unterscheiden; auf jener ist Λ negativ, auf dieser positiv.*

Wenn im Vorstehenden jedem Punkte einer gemeinsamen Tangente der Flächen λ_0 und μ_0 von bestimmter Richtung die 3 Wurzelfunctionen Λ, M, N mit bestimmten Vorzeichen als zugehörig angesehen wurden, so wurde davon abstrahirt, dass jeder in Bezug auf die Flächen λ_0 und μ_0 äussere Punkt des Raumes auf 4 solchen Tangenten liegt, und dass ihm in diesem Sinne 4 durch ihre Vorzeichen verschiedene Werthsysteme Λ, M, N zukommen, die sich auf die 4 von ihm ausgehenden Tangentenelemente dS vertheilen. Nach der Definition der positiven Richtung der Tangenten (§ 2) *stimmen in den 4 einem Punkte λ, μ, ν (als einem Punkte auf 4 gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0) zugehörigen Tripeln zusammengesetzter Wurzelfunctionen* Λ, M, N *immer die 4 Wurzelfunctionen* N *im Vorzeichen überein.* Die

Vorzeichen der 4 Tripel Λ, M, N fallen also unter den Typus: $+, +, \varepsilon$; $-, +, \varepsilon$; $+, -, \varepsilon$; $-, -, \varepsilon$; wo $\varepsilon = +$ oder $-$ ist, jenachdem für den Punkt λ, μ, ν $x \cdot y$ positiv oder negativ ausfällt.

Einem Punkte der Fläche λ_0 gehören, indem $\Lambda = 0$ wird, nur zwei Systeme $0, \pm \mathsf{M}, \varepsilon \mathsf{N}$ zusammengesetzter Wurzelfunctionen zu, welche sich auf die beiden durch den Punkt gehenden gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 vertheilen.

§ 7.

Darstellung des Längenelementes der gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 durch hyperelliptische Differentiale 2. oder 3. Gattung.

Die beabsichtigte functionentheoretische Deutung gewisser Maassverhältnisse innerhalb der Schaar der confocalen Flächen lässt es zweckmässig erscheinen, neben der gewöhnlichen Maassbestimmung auch die allgemeine projectivische Maassbestimmung*) in Betracht zu ziehen. Jene wählt als Fundamentalfläche eine der 4 *uneigentlichen* Flächen der Schaar, den *imaginären Kugelkreis;* für diese mag eine *eigentliche* Fläche der Schaar, etwa das *Ellipsoid* $\lambda = \omega$ $(-\infty < \omega < \lambda_0)$, als Fundamentalfläche herausgegriffen werden. Die Aufgabe des vorliegenden § 7 ist es, das Längenelement der gemeinsamen Tangenten der beiden Flächen λ_0 und μ_0 mit Bezug auf die beiden *vertretungsweise* gewählten Maassbestimmungen in elliptischen Coordinaten darzustellen. Die Entfernung zweier Punkte x, y, z und x', y', z' stellt sich in den auf die Flächen $\lambda = -\infty$ und $\lambda = \omega$ bezogenen Maassbestimmungen bezüglich durch die Formeln:

$$E = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \tag{21}$$

und

$$E' = c \cdot \log \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{\Omega_1 - \Omega_2} \tag{21'}$$

dar, wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\Omega_1 = \frac{xx'}{\alpha-\omega} + \frac{yy'}{\beta-\omega} + \frac{zz'}{\gamma-\omega} - 1,$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{(x-x')^2}{\alpha-\omega} + \frac{(y-y')^2}{\beta-\omega} + \frac{(z-z')^2}{\gamma-\omega} - \frac{(yz'-zy')^2}{(\beta-\omega)(\gamma-\omega)} - \frac{(zx'-xz')^2}{(\gamma-\omega)(\alpha-\omega)} - \frac{(xy'-yx')^2}{(\alpha-\omega)(\beta-\omega)}}.$$

Die willkürliche Constante der ersteren Maassbestimmung ist hierbei im Sinne der Euklid'schen Geometrie bestimmt gedacht; die will-

*) Vergl. Cayley, A sixth memoir upon quantics, Philosophical Transactions, vol. 149 (1859), S. 61. Klein, Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, Mathematische Annalen, Bd. IV (1871), S. 573.

kürliche Constante c der letzteren Maassbestimmung sei als reell vorausgesetzt*), sodass zwei Punkte *innerhalb* des Ellipsoides $\lambda = \omega$ eine *reelle* Distanz besitzen.

Die Ausdrücke für das Linienelement des Raumes lauten, entsprechend den beiden Maassbestimmungen:

$$dE = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

und:

$$dE' = 2c \cdot \frac{\sqrt{\frac{dx^2}{\alpha-\omega} + \frac{dy^2}{\beta-\omega} + \frac{dz^2}{\gamma-\omega} - \frac{(y\,dz - z\,dy)^2}{(\beta-\omega)(\gamma-\omega)} - \frac{(z\,dx - x\,dz)^2}{(\gamma-\omega)(\alpha-\omega)} - \frac{(x\,dy - y\,dx)^2}{(\alpha-\omega)(\beta-\omega)}}}{\frac{x^2}{\alpha-\omega} + \frac{y^2}{\beta-\omega} + \frac{z^2}{\gamma-\omega} - 1}.$$

Die Einführung der *elliptischen* Coordinaten liefert für das Quadrat von dE den bekannten Ausdruck:

$$(22) \quad dE^2 = \frac{1}{4}\frac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)\,d\lambda^2}{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)} + \frac{1}{4}\frac{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)\,d\mu^2}{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\gamma-\mu)} + \frac{1}{4}\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)\,d\nu^2}{(\alpha-\nu)(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}.$$

Um auch dE'^2 in elliptischen Coordinaten darzustellen, benutzt man die identischen Transformationsformeln:

$$\frac{x^2}{\alpha-\omega} + \frac{y^2}{\beta-\omega} + \frac{z^2}{\gamma-\omega} - 1 = -\frac{(\lambda-\omega)(\mu-\omega)(\nu-\omega)}{(\alpha-\omega)(\beta-\omega)(\gamma-\omega)};$$

$$\frac{dx^2}{\alpha-\omega} + \frac{dy^2}{\beta-\omega} + \frac{dz^2}{\gamma-\omega} - \frac{(y\,dz - z\,dy)^2}{(\beta-\omega)(\gamma-\omega)} - \frac{(z\,dx - x\,dz)^2}{(\gamma-\omega)(\alpha-\omega)} - \frac{(x\,dy - y\,dx)^2}{(\alpha-\omega)(\beta-\omega)}$$

$$= \frac{1}{4(\alpha-\omega)(\beta-\omega)(\gamma-\omega)}\left\{\frac{(\mu-\omega)(\nu-\omega)(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)}d\lambda^2 + \frac{(\nu-\omega)(\lambda-\omega)(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\gamma-\mu)}d\mu^2 + \frac{(\lambda-\omega)(\mu-\omega)(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}{(\alpha-\nu)(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}d\nu^2\right\}.$$

Hiermit wird:

$$(22') \quad dE'^2 = c^2\frac{(\alpha-\omega)(\beta-\omega)(\gamma-\omega)}{(\lambda-\omega)^2(\mu-\omega)^2(\nu-\omega)^2}\left\{\frac{(\mu-\omega)(\nu-\omega)(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)}d\lambda^2 + \frac{(\nu-\omega)(\lambda-\omega)(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\gamma-\mu)}d\mu^2 + \frac{(\lambda-\omega)(\mu-\omega)(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}{(\alpha-\nu)(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}d\nu^2\right\}.$$

Die Formeln (22) *und* (22′) *geben also die allgemeinen Werthe des räumlichen Linienelementes in elliptischen Coordinaten mit Bezug auf die beiden Fundamentalflächen* $\lambda = -\infty$ *und* $\lambda = \omega$.

Gehört im Besonderen das Linienelement einer *gemeinsamen Tangente der Flächen* λ_0 *und* μ_0 an, sodass die Differentiale $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ den Gleichungen (20) entsprechen, so lassen sich in den Ausdrücken für das Linienelement, welches dann mit dS, resp. dS' bezeichnet sei, die Variabeln λ, μ, ν *separiren*.

*) Vergl. Klein, a. eben angef. O. S. 608.

Trägt man, um diese Separation zu erreichen, zunächst in die Darstellung (22) von dE^2 die Abkürzungen Λ, M, N ein, so wird:

$$dE^2 = \frac{1}{4}(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)\frac{d\lambda^2}{\Lambda^2}$$
$$+\frac{1}{4}(\nu-\mu)(\mu-\lambda)(\mu-\lambda_0)(\mu_0-\mu)\frac{d\mu^2}{M^2}$$
$$+\frac{1}{4}(\nu-\lambda)(\nu-\mu)(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)\frac{d\nu^2}{N^2}.$$

Vermöge der Formeln (19) kann man hier, falls es sich um ein Element dS handelt, $\frac{d\mu^2}{M^2}$ und $\frac{d\nu^2}{N^2}$ durch $\frac{d\lambda^2}{\Lambda^2}$ ausdrücken und erhält, indem man unter Benutzung der Identität:

$$(\mu-\nu)(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\mu_0)+(\nu-\lambda)(\mu-\lambda_0)(\mu-\mu_0)+(\lambda-\mu)(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)$$
$$=-(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)$$

zusammenzieht:

$$dS^2 = \frac{1}{4}(\mu-\lambda)^2(\nu-\lambda)^2\frac{d\lambda^2}{\Lambda^2}.$$

Der *positive* Werth des Linienelementes ist daher:

$$dS = \frac{1}{2}(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)\frac{d\lambda}{\Lambda},$$

sofern das Vorzeichen der Quadratwurzel Λ so bestimmt wird, dass $\frac{d\lambda}{\Lambda}$ positiv ausfällt. Diese Formel löst sich unter abermaliger Benutzung der eben angewandten Identität rückwärts auf, wie folgt:

$$dS = \frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)\frac{d\lambda}{\Lambda}+\frac{1}{2}\frac{\nu-\lambda}{\nu-\mu}(\mu-\lambda_0)(\mu_0-\mu)\frac{d\lambda}{\Lambda}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\mu-\lambda}{\nu-\mu}(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)\frac{d\lambda}{\Lambda}.$$

Hierfür kann man schliesslich mit Rücksicht auf (19) schreiben:

$$(23)\qquad dS = \frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)\frac{d\lambda}{\Lambda}+\frac{1}{2}(\mu-\lambda_0)(\mu_0-\mu)\frac{d\mu}{M}$$
$$+\frac{1}{2}(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)\frac{d\nu}{N}.$$

In den Gleichungen (20) waren bei positivem $\frac{d\lambda}{\Lambda}$ nothwendig auch $\frac{d\mu}{M}$ und $\frac{d\nu}{N}$ positiv, sodass in dem gefundenen Ausdrucke für dS alle 3 Terme positiv sind.

Bei analoger Behandlung der Formel (22′) für dE'^2, unter Benutzung der Identität:

$$(\mu-\omega)(\nu-\omega)(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)(\nu-\mu)+(\nu-\omega)(\lambda-\omega)(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu)(\lambda-\nu)$$
$$+(\lambda-\omega)(\mu-\omega)(\lambda_0-\nu)(\mu_0-\nu)(\mu-\lambda)$$
$$=-(\nu-\mu)(\lambda-\nu)(\mu-\lambda)(\lambda_0-\omega)(\mu_0-\omega),$$

erhält man für das Linienelement der gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 in der auf die Fundamentalfläche $\lambda = \omega$ bezogenen Maassbestimmung:

$$(23') \quad dS' = c \cdot \sqrt{\frac{(\alpha-\omega)(\beta-\omega)(\gamma-\omega)}{(\lambda_0-\omega)(\mu_0-\omega)}} \left\{ \frac{(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}{\lambda-\omega} \cdot \frac{d\lambda}{\Lambda} + \frac{(\mu-\lambda_0)(\mu_0-\mu)}{\mu-\omega} \cdot \frac{d\mu}{\mathsf{M}} + \frac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)}{\nu-\omega} \cdot \frac{d\nu}{\mathsf{N}} \right\}.$$

Auch hier sind alle 3 Terme in der Klammer einzeln von positivem Werthe, und soll über den *vor* der Klammer stehenden constanten Factor dasselbe angenommen werden. Das Resultat ist dies:

Der positive Werth des Linienelementes der gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 ist, jenachdem der Kugelkreis $\lambda = -\infty$ oder das Ellipsoid $\lambda = \omega$ als Fundamentalfläche der Maassbestimmung gilt, bezüglich durch die Formeln (23) *oder* (23′) *dargestellt, wo die Vorzeichen der Quadratwurzeln* Λ, M, N *so zu bestimmen sind, dass die Differentiale* $\frac{d\lambda}{\Lambda}$, $\frac{d\mu}{\mathsf{M}}$, $\frac{d\nu}{\mathsf{N}}$ *positiv werden.*

Es sind also, wenn $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ in der positiven Richtung der Tangente gemessen werden, Λ, M, N die dem Elemente zugehörigen zusammengesetzten Wurzelfunctionen. Die Ausdrücke (23) und (23′) gelten überdies auch für das Längenelement derjenigen *geodätischen Linien* auf den Flächen λ_0 und μ_0, welche die Durchdringungscurve der Flächen berühren, und für das Längenelement der *Durchdringungscurve* selbst*).

Es bedarf kaum der Erwähnung, dass der *eine algebraische Unendlichkeitspunkt* des hyperelliptischen Integrals 2. Gattung:

$$\int \frac{(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)\,d\lambda}{2\Lambda}$$

dem *einen unendlich fernen Punkte* entspricht, den die gemeinsame Tangente der Flächen λ_0 und μ_0 nach der Auffassung der Euklid'schen Geometrie besitzt. Ebenso fallen die *beiden logarithmischen Unendlichkeitspunkte* des Integrals 3. Gattung:

$$\int \frac{(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)\,d\lambda}{(\lambda-\omega)\Lambda}$$

auf *die Durchstosspunkte* der genannten Tangente *mit der Fundamentalfläche ω der allgemeinen projectiven Maassbestimmung.*

*) Vergl. Mathematische Annalen, Bd. XX, S. 158

Kapitel II.

Darstellung der Gebilde im confocalen Flächensystem durch hyperelliptische Functionen.

§ 8.

Einführung transcendenter Parameter an Stelle der elliptischen Coordinaten.

Das doppelte Ziel der analytisch-geometrischen Entwicklungen des Kapitels I war einerseits *die einheitliche algebraische Parameterdarstellung* einer Reihe geometrischer Gebilde im confocalen Flächensystem (§§ 1—4), andererseits die Feststellung der geometrischen Bedeutung der *hyperelliptischen Differentialgleichungen* vom Geschlecht 2 (§§ 5—6) und der entsprechenden Differentialausdrücke 2. und 3. Gattung (§ 7). Der Nachtheil der gefundenen algebraischen Parameterdarstellungen ist die durchgehends auftretende *Mehrdeutigkeit* der Bestimmung der abhängigen Elemente durch die unabhängigen. Es bleibt als Aufgabe des vorliegenden Kapitels II, die bisher benutzten algebraischen Irrationalitäten durch *eindeutige* Functionen transcendenter Parameter zu ersetzen. Zu diesem Zwecke sollen an Stelle der *elliptischen Coordinaten* λ, μ, ν vier Parameter v_1, v_2, u_1, u_2 eintreten, von denen die beiden letzten völlig unabhängig, die beiden ersten aber durch *eine Relation* aneinander gebunden sind, sodass die 4 Parameter nur 3 unabhängigen Parametern äquivalent bleiben. Die Parameter v_1, v_2, u_1, u_2 werden unter Vermittlung der durch gliedweise Integration der Differentialgleichungen (20) hervorgehenden Integrale und Integraldifferenzen:

$$(24)\qquad \begin{cases} V_1 = \int_{\lambda_0}^{\lambda, A} \frac{dz}{Z}, & V_2 = \int_{\lambda_0}^{\lambda, A} \frac{z\,dz}{Z}, \\ U_1 = \int_{\beta}^{\nu, N} \frac{dz}{Z} - \int_{\gamma}^{\mu, M} \frac{dz}{Z}, & U_2 = \int_{\beta}^{\nu, N} \frac{z\,dz}{Z} - \int_{\gamma}^{\mu, M} \frac{z\,dz}{Z} \end{cases}$$

mit der Abkürzung:

$$Z = \sqrt{(\alpha - z)(\beta - z)(\mu_0 - z)(\gamma - z)(\lambda_0 - z)}$$

definirt, und zwar durch folgende Formeln:

$$(25)\qquad \begin{cases} v_1 = \frac{V_1 B_2 - V_2 B_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \cdot \frac{\pi i}{2}, & v_2 = \frac{A_1 V_2 - A_2 V_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \cdot \frac{\pi i}{2}, \\ u_1 = \frac{U_1 B_2 - U_2 B_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \cdot \frac{\pi i}{2}, & u_2 = \frac{A_1 U_2 - A_2 U_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \cdot \frac{\pi i}{2}. \end{cases}$$

Hierin haben die Coefficienten A, B, neben welche noch 4 weitere Constanten C, D gestellt werden mögen, folgende Bedeutung:

$$(26)\quad \begin{cases} A_1 = \int_{\gamma}^{\mu_0} \frac{dz}{\sqrt{Z^2}}, \quad B_1 = -\int_{\beta}^{\alpha} \frac{dz}{\sqrt{Z^2}}, \quad C_1 = \int_{\lambda_0}^{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{-Z^2}}, \quad D_1 = -\int_{\alpha}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{-Z^2}}, \\ A_2 = \int_{\gamma}^{\mu_0} \frac{z\,dz}{\sqrt{Z^2}}, \quad B_2 = -\int_{\beta}^{\alpha} \frac{z\,dz}{\sqrt{Z^2}}, \quad C_2 = \int_{\lambda_0}^{\gamma} \frac{z\,dz}{\sqrt{-Z^2}}, \quad D_2 = -\int_{\alpha}^{\infty} \frac{z\,dz}{\sqrt{-Z^2}}, \\ A_1 + B_1 = \int_{-\infty}^{\lambda_0} \frac{dz}{\sqrt{Z^2}}, \qquad C_1 - D_1 = \int_{\mu_0}^{\beta} \frac{dz}{\sqrt{-Z^2}}, \\ A_2 + B_2 = \int_{-\infty}^{\lambda_0} \frac{z\,dz}{\sqrt{Z^2}}, \qquad C_2 - D_2 = \int_{\mu_0}^{\beta} \frac{z\,dz}{\sqrt{-Z^2}}, \end{cases}$$

wo die Integrale mit *positivem* Werthe von $\sqrt{Z^2}$ oder $\sqrt{-Z^2}$ auf *reellem* Wege zwischen ihren beiden Grenzen zu berechnen sind. Zwischen den Constanten (26) besteht die *bilineare Relation:*

$$A_1 C_2 - A_2 C_1 + B_1 D_2 - B_2 D_1 = 0.$$

Wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$(27)\quad d\omega_1 = \frac{\pi i}{2} \cdot \frac{B_2 - B_1 z}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \cdot \frac{dz}{Z}, \qquad d\omega_2 = \frac{\pi i}{2} \cdot \frac{A_1 z - A_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \cdot \frac{dz}{Z},$$

so stellen sich die Parameter v_1, v_2, u_1, u_2 als Integrale und Integraldifferenzen also dar:

$$(28)\quad \begin{cases} v_1 = \int_{\lambda_0}^{\lambda, \Lambda} d\omega_1, \qquad v_2 = \int_{\lambda_0}^{\lambda, \Lambda} d\omega_2, \\ u_1 = \int_{\beta}^{\nu, N} d\omega_1 - \int_{\gamma}^{\mu, M} d\omega_1, \qquad u_2 = \int_{\beta}^{\nu, N} d\omega_2 - \int_{\gamma}^{\mu, M} d\omega_2. \end{cases}$$

Wie man erkennt, sind die aus den Integralfunctionen (24) durch lineare Combination hervorgegangenen Parameter v_1, v_2, u_1, u_2 *gewisse Normalintegrale des hyperelliptischen Gebildes* z, Z*). Man denke sich, um hierauf näher einzugehen, die *Riemann'sche Fläche des Gebildes* mit den 6 reellen Windungspunkten**) z, $Z = \lambda_0, \gamma, \mu_0, \beta, \alpha, \infty$ und etwa den 3 geradlinigen Uebergangslinien**) $\lambda_0\gamma$, $\mu_0\beta$, $\alpha\infty$ durch das in Fig. 1 angedeutete Querschnittsystem in eine einfach zusammenhängende**) Fläche verwandelt.

*) Die oberen Grenzen λ, Λ; μ, M; ν, N der Integrale in (24) und (28) sind drei verschiedene, variable Stellen des Gebildes z, Z. Es bezeichnen dabei Λ, M, N bezüglich die Werthe, welche Z für $z = \lambda, \mu, \nu$ annimmt.

**) Die Terminologie nach C. Neumann, Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Functionen, S. 165, 166, 294.

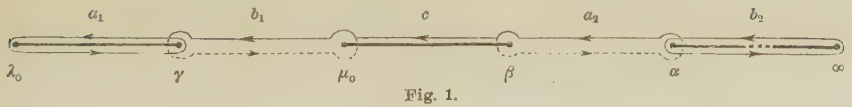

Fig. 1.

Das Querschnittsystem besteht aus 4 Querschnitten a_1, b_1, a_2, b_2 und dem unwesentlichen Verbindungsstück c; die einzelnen Schnitte oder Ströme sind durch ausgezogene oder punktirte Linien angedeutet, jenachdem sie im obern oder untern Blatte der Fläche verlaufen, und mit einer bestimmten durch die Pfeile angedeuteten Richtung versehen, sodass ein rechtes und linkes Ufer derselben unterschieden werden kann; die Schnitte sollen in bekannter Weise dicht an die reelle Axe herangedrängt sein. Die Quadratwurzel Z sei auf der reellen Axe zwischen γ und μ_0 im obern Blatte positiv.

Alsdann ergeben sich die Periodicitätsmoduln, welche die vorkommenden Integrale beim Ueberschreiten der Ströme a und b vom rechten zum linken Ufer erhalten, aus folgender Tabelle:

(29)

	a_1	b_1	a_2	b_2
$\int \frac{dz}{Z}$	$2A_1$	$2iC_1$	$2iD_1$	$-2B_1$
$\int \frac{zdz}{Z}$	$2A_2$	$2iC_2$	$2iD_2$	$-2B_2$
$\int d\omega_1$	πi	a_{11}	a_{12}	0
$\int d\omega_2$	0	a_{21}	a_{22}	$-\pi i$

Dabei haben die *reellen* Grössen a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} die Werthe:

(29′)
$$\begin{cases} a_{11} = -\frac{C_1B_2 - C_2B_1}{A_1B_2 - A_2B_1} \cdot \pi, \quad a_{22} = -\frac{A_1D_2 - A_2D_1}{A_1B_2 - A_2B_1} \cdot \pi, \\ a_{12} = a_{21} = -\frac{D_1B_2 - D_2B_1}{A_1B_2 - A_2B_1} \cdot \pi = -\frac{A_1C_2 - A_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1} \cdot \pi, \end{cases}$$

und ist, wenn n_1 und n_2 irgend welche positive oder negative ganze Zahlen bedeuten, die Form:

(30)
$$a_{11}n_1^2 + 2a_{12}n_1n_2 + a_{22}n_2^2$$

immer negativ.

Die in (29) gegebene Vertheilung der Normalperioden auf die Querschnitte a und b entspricht nicht genau dem gewöhnlichen Gebrauche, welcher bei der angenommenen Zerschneidung der Riemann'schen Fläche den Querschnitten a_1 und a_2 die Periodenpaare $\pi i, 0$ und $0, \pi i$ und den Querschnitten b_1 und b_2 die Periodenpaare a_{11}, a_{21} und a_{12}, a_{22} zuertheilt. Der Zusammenhang der eingeführten

Normalintegrale $\int d\omega_1$ und $\int d\omega_2$ und Periodicitätsmoduln a_{11}, a_{12}, a_{22} mit den gewöhnlichen*) Normalintegralen und Periodicitätsmoduln, welche letzteren für den Augenblick mit $\int d\omega_1'$, $\int d\omega_2'$ und a_{11}', a_{12}', a_{22}' bezeichnet seien, geben die Transformationsformeln:

$$d\omega_1 = d\omega_1' - \frac{a_{12}'}{a_{22}'} \cdot d\omega_2', \qquad d\omega_2 = -\frac{\pi i}{a_{22}'} \cdot d\omega_2',$$

$$a_{11} = \frac{a_{11}'a_{22}' - a_{12}'a_{12}'}{a_{22}'}, \qquad a_{12} = -\frac{a_{12}'}{a_{22}'} \cdot \pi i, \qquad a_{22} = \frac{\pi^2}{a_{22}'}.$$

Die Abweichung von der gewöhnlichen Normirung ist im vorliegenden Falle *im Anschluss an Herrn Weierstrass***) geschehen und durch den Umstand geboten, dass die Vertheilung der reellen und imaginären Perioden der *gegebenen* Integrale $\int \frac{dz}{Z}$ und $\int \frac{z\,dz}{Z}$, wie sie die beiden ersten Zeilen in (29) geben, die Querschnitte a_1 und b_2 einerseits, b_1 und a_2 andererseits als zusammengehörig kennzeichnet.

Die Eigenschaft der Form (30) ist bekanntlich nöthig, damit die zweifach unendliche ϑ-Reihe:

$$\vartheta\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2'\end{pmatrix}(w_1 | w_2) =$$

$$\sum_{-\alpha}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{a_{11}\left(n_1+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)^2+2a_{12}\left(n_1+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\left(n_2+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)+a_{22}\left(n_2+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)^2+2\left(n_1+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\left(w_1+\frac{\varepsilon_1'}{2}\pi i\right)+2\left(n_2+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)\left(w_2+\frac{\varepsilon_2'}{2}\pi i\right)}$$

für alle endlichen Werthe der beiden complexen Variablen $w_1 | w_2$ convergire.***)

Da die in (25) oder (28) definirten Parameter v_1 und v_2 zwei linear unabhängige Normalintegrale *zwischen den nämlichen Grenzen* sind, so besteht zwischen denselben eine identische Relation. Es entspricht nämlich der besondern Auswahl des Querschnittsystems (Fig. 1) und der Vertheilung der Normalperioden auf die einzelnen Querschnitte (29) eine bestimmte wechselseitige Zuordnung der 6 *ungeraden* ϑ-Functionen und der 6 Windungspunkte der Riemann'schen Fläche. Diese Zuordnung kann dadurch charakterisirt werden, dass identisch in Bezug auf z, Z die Gleichungen bestehen†):

*) Vgl. Prym, in den Denkschriften der k. Academie der Wissenschaften zu Wien, 24. Band (1864), S. 28.

**) Vgl. Weierstrass, Ueber die geodätischen Linien auf dem dreiaxigen Ellipsoid. Monatsberichte der Kgl. Academie zu Berlin, Jahrg. 1861, S. 986.

***) Ueber die Bezeichnung vgl. die zu § 9 citirte Schrift von Krazer, S. 1.

†) Vgl. Riemann, Ueber das Verschwinden der ϑ-Functionen, Ges. Werke, herausg. von Weber, S. 198, oder Prym, a. a. O. S. 37, oder Neumann, a. a. O. S. 490.

$$(31)\quad \begin{cases} \vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\left(\int_{\lambda_0}^{z,Z} d\omega_1 \,\Big|\, \int_{\lambda_0}^{z,Z} d\omega_2\right)=0, \qquad \vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\left(\int_{\gamma}^{z,Z} d\omega_1 \,\Big|\, \int_{\gamma}^{z,Z} d\omega_2\right)=0, \\ \qquad\qquad \vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\left(\int_{\mu_0}^{z,Z} d\omega_1 \,\Big|\, \int_{\mu_0}^{z,Z} d\omega_2\right)=0, \\ \vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\left(\int_{\beta}^{z,Z} d\omega_1 \,\Big|\, \int_{\beta}^{z,Z} d\omega_2\right)=0, \qquad \vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\left(\int_{\alpha}^{z,Z} d\omega_1 \,\Big|\, \int_{\alpha}^{z,Z} d\omega_2\right)=0, \\ \qquad\qquad \vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\left(\int_{\infty}^{z,Z} d\omega_1 \,\Big|\, \int_{\infty}^{z,Z} d\omega_2\right)=0. \end{cases}$$

Im Besonderen *genügen also die Parameter* v_1 *und* v_2 *nach ihrer Definition* (28) *der Relation:*

$$(32)\qquad \vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}(v_1\,|\,v_2)=0.$$

§ 9.

Darstellung der homogenen Punktcoordinaten im Raume durch Producte zweier ϑ-Functionen.

Die in den Ausdrücken (8) für die rechtwinkligen Coordinaten $x=x:t$, $y=y:t$, $z=z:t$ auftretenden einfachen Wurzelfunctionen der elliptischen Coordinaten λ, μ, ν stellen sich, vermöge der in den Formeln (28) festgelegten Abhängigkeit der Parameter $v_1\,|\,v_2$ und der Parameter $u_1\,|\,u_2$ von λ und bezüglich von μ und ν, ihrerseits als Quotienten von ϑ-Functionen der Variabeln $v_1\,|\,v_2$ und $u_1\,|\,u_2$ dar. Es ist nämlich, vorausgesetzt, dass v_1 v_2 der Relation (32) genügen:

$$(a)\quad \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\alpha-\lambda}}{\sqrt{\alpha-\lambda_0}} = \dfrac{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(v_1\,|\,v_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(v_1\,|\,v_2)}, \\ \dfrac{\sqrt{\beta-\lambda}}{\sqrt{\beta-\lambda_0}} = \dfrac{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}(v_1\,|\,v_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(v_1\,|\,v_2)}, \\ \dfrac{\sqrt{\gamma-\lambda}}{\sqrt{\gamma-\lambda_0}} = \dfrac{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}(v_1\,v_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(v_1\,v_2)}, \end{cases}$$

und ferner:

(b)
$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\sqrt{\alpha-\nu}\,\sqrt{\alpha-\mu}}{\sqrt{\alpha-\beta}\,\sqrt{\alpha-\gamma}} = \dfrac{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(u_1|u_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1|u_2)}, \\ \dfrac{\sqrt{\nu-\beta}\,\sqrt{\beta-\mu}}{\sqrt{\alpha-\beta}\,\sqrt{\beta-\gamma}} = \dfrac{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(u_1\ u_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1|u_2)}, \\ \dfrac{\sqrt{\nu-\gamma}\,\sqrt{\mu-\gamma}}{\sqrt{\alpha-\gamma}\,\sqrt{\beta-\gamma}} = \dfrac{\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1,u_2)}. \end{array}\right.$$

Dabei sind dem gewöhnlichen Gebrauche entsprechend für die ohne Argumente geschriebenen ϑ-Functionen die Argumente $0\,|\,0$ hinzuzudenken*).

Die Verbindung dieser beiden Formelsysteme mit den Gleichungen (8) führt, indem sich die Nullwerthe der ϑ-Functionen ganz fortheben, zu dem Resultat:

Die homogenen Punktcoordinaten x, y, z, t der Punkte des Raumes stellen sich in Abhängigkeit von den 4 *Parametern $v_1|v_2$ und $u_1|u_2$ in folgender Weise dar:*

(33)
$$\left\{\begin{array}{l} \varkappa\cdot\dfrac{x}{\sqrt{\alpha-\lambda_0}} = \vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(u_1|u_2), \\ \varkappa\cdot\dfrac{y}{\sqrt{\beta-\lambda_0}} = \vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(u_1|u_2), \\ \varkappa\cdot\dfrac{z}{\sqrt{\gamma-\lambda_0}} = \vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(u_1|u_2), \\ \varkappa\cdot t = \vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(v_1|v_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1|u_2), \\ \qquad\qquad \vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}(v_1|v_2) = 0. \end{array}\right.$$

Dabei bedeutet $\varkappa$, wie auch fernerhin, einen Proportionalitätsfactor.

Dieses Gleichungssystem (33) kann, indem man darin die Parameter $v_1|v_2$ der Reihe nach die der Gleichung (32) entsprechenden Werthe annehmen und alsdann jedesmal die Parameter $u_1|u_2$ beliebig variiren lässt, als *eine Darstellung der verschiedenen Flächen λ* des confocalen Systems (1) durch die Parameter $u_1|u_2$ betrachtet werden.

*) Die Umkehrformeln (a) sind, nur in veränderter Bezeichnung und mit veränderter Bestimmung der unteren Integralgrenzen, die von Prym, a. a. O. S. 57, die Umkehrformeln (b) die von Prym ebenda S. 50, sowie von Rosenhain in dem Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes (Mémoires présentés par divers savants à l'académie des sciences, t. XI) S. 422 gegebenen.

Indem λ auf reellem Wege von $-\infty$ bis λ_0 wächst, laufen $V_1 | V_2$ durch immer reelle Werthe von $A_1 + B_1 \mid A_2 + B_2$ bis $0 | 0$ und $v_1 | v_2$ durch immer rein imaginäre Werthe von $\frac{\pi i}{2} \mid \frac{\pi i}{2}$ bis $0|0$. Es entspricht daher dem Werthepaare $v_1 | v_2 = \frac{\pi i}{2} \mid \frac{\pi i}{2}$ das unendlich grosse Ellipsoid des confocalen Systems, und dem Werthepaare $v_1 | v_2 = 0\ 0$ das Ellipsoid λ_0. Mit Bezug auf das letztere ergiebt sich also:

Die homogenen Coordinaten der Punkte des Ellipsoides λ_0 stellen sich in Abhängigkeit von den beiden unabhängigen Parametern $u_1 | u_2$ in folgender Weise dar):*

$$(34)\quad \begin{cases} \varkappa \cdot \dfrac{x}{\sqrt{\alpha - \lambda_0}} = \vartheta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vartheta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (u_1 | u_2), \\ \varkappa \cdot \dfrac{y}{\sqrt{\beta - \lambda_0}} = \vartheta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vartheta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (u_1\ u_2), \\ \varkappa \cdot \dfrac{z}{\sqrt{\gamma - \lambda_0}} = \vartheta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vartheta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (u_1 | u_2), \\ \varkappa \cdot t = \vartheta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vartheta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (u_1 | u_2). \end{cases}$$

Indem man hier die Quotienten der Nullwerthe der ϑ-Functionen durch die Constanten α, β, μ_0, γ, λ_0 ausdrückt, wie folgt:

$$\frac{\vartheta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{\vartheta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \sqrt[4]{\frac{(\alpha - \lambda_0)(\alpha - \mu_0)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}}, \qquad \frac{\vartheta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{\vartheta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \sqrt[4]{\frac{(\beta - \lambda_0)(\beta - \mu_0)}{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)}},$$

$$\frac{\vartheta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{\vartheta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \sqrt[4]{\frac{(\gamma - \lambda_0)(\mu_0 - \gamma)}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)}},$$

wird man auf die *Weierstrass'sche Darstellung der Fläche 2. Grades* geführt**).

Diese Darstellung (34) beruht auf der identischen Relation:

$$(35)\quad \vartheta^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vartheta^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (u_1 | u_2) + \vartheta^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vartheta^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (u_1 | u_2)$$
$$+ \vartheta^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vartheta^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (u_1 | u_2) - \vartheta^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vartheta^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (u_1 | u_2) = 0,$$

welche zwischen den 4 ersten Functionen des Rosenhain'schen Sechsersystems***):

*) Den Formeln (33) und (34) gehen die Formeln (43) und (46) parallel, welche mit jenen zusammen die *Hauptresultate des vorliegenden Kapitels* bilden (vgl. die Schlussbemerkung des Kapitels).

**) Vgl. Weierstrass, a. a. O., ferner v. Braunmühl, Mathematische Annalen, Bd. XX, S. 557.

***) Vgl. über diese Terminologie: Krazer, Theorie der zweifach unendlichen ϑ-Reihen auf Grund der Riemann'schen ϑ-Formel (Leipzig 1882), S. 30.

$$(36)\quad \vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(u_1|u_2),\quad \vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(u_1|u_2),\quad \vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(u_1|u_2),$$
$$\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1|u_2),\quad \vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}(u_1|u_2),\quad \vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)$$

besteht*).

Die Darstellung der einzelnen Fläche λ des confocalen Systems durch die Parameter $u_1|u_2$, welche die Formeln (33) bei constant bleibenden $v_1|v_2$ leisten, ist im Allgemeinen dadurch charakterisirt, dass die Schnittcurven der Fläche λ mit den Ebenen $x=0$, $y=0$, $z=0$, $t=0$ bezüglich durch die Gleichungen:

$$(37)\quad \vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(u_1|u_2)=0,\quad \vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)=0,$$
$$\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)=0,\quad \vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1|u_2)=0$$

repräsentirt werden. Aber auch das Verschwinden der beiden noch übrigen ϑ-Functionen des Sechsersystems (36), also die Gleichungen:

$$(37')\quad \vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)=0,\quad \vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)=0,$$

haben ihre einfache Bedeutung.

Setzt man nämlich $\mu, \mathsf{M}=\mu_0$, so erhalten die Parameter $u_1|u_2$ die Werthe:

$$u_1|u_2=\int_\beta^{\nu,N} d\omega_1-\int_\gamma^{\mu_0} d\omega_1\,\Big|\int_\beta^{\nu,N} d\omega_2-\int_\gamma^{\mu_0} d\omega_2$$
$$=\int_\beta^{\nu,N} d\omega_1-\frac{\pi i}{2}\,\Big|\int_\beta^{\nu,N} d\omega_2;$$

die hiermit gesetzten Beziehungen:

$$\int_\beta^{\nu,N} d\omega_1\,\Big|\int_\beta^{\nu,N} d\omega_2=u_1+\frac{\pi i}{2}\,|\,u_2$$

haben mit Rücksicht auf (31) zur Folge:

$$\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\Big(u_1+\frac{\pi i}{2}\,|\,u_2\Big)=0\quad\text{oder:}\quad \vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)=0.$$

Es ist also die 1. Gleichung (37′) die Gleichung der Schnittcurve des Ellipsoides λ mit dem Hyperboloid μ_0. In analoger Weise ergiebt

*) Vgl. Weber, Ueber die Kummer'sche Fläche 4. Ordnung mit 16 Knotenpunkten und ihre Beziehung zu den ϑ-Functionen mit 2 Veränderlichen, Crelle's Journal, Bd. 84, S. 334, Formelsystem A.

sich, dass die 2. Gleichung (37′) die Gleichung der nicht reellen Schnittcurve des Ellipsoides λ mit dem Ellipsoid λ_0 ist.

Zu demselben Resultat führt auch die Betrachtung der Formen:

$$\varphi_1 = \frac{x^2}{\alpha - \mu_0} + \frac{y^2}{\beta - \mu_0} - \frac{z^2}{\mu_0 - \gamma} - 1,$$

$$\varphi_2 = \frac{x^2}{\alpha - \lambda_0} + \frac{y^2}{\beta - \lambda_0} + \frac{z^2}{\gamma - \lambda_0} - 1,$$

deren Quadratwurzeln sich in den λ, μ, ν einerseits und den $v_1 \mid v_2$, $u_1 \mid u_2$ andrerseits so darstellen:

$$\sqrt{\varphi_1} = \frac{\sqrt{\mu_0 - \lambda}}{\sqrt{\mu_0 - \gamma}} \cdot \frac{\sqrt{\nu - \mu_0}\sqrt{\mu_0 - \mu}}{\sqrt{\alpha - \mu_0}\sqrt{\beta - \mu_0}},$$

$$\sqrt{\varphi_2} = \frac{\sqrt{\lambda_0 - \lambda}}{\sqrt{\gamma - \lambda_0}} \cdot \frac{\sqrt{\nu - \lambda_0}\sqrt{\mu - \lambda_0}}{\sqrt{\alpha - \lambda_0}\sqrt{\beta - \lambda_0}},$$

$$(38) \quad \begin{cases} \sqrt{\varphi_1} = \dfrac{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}(v_1 \mid v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}(v_1 \mid v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2)}, \\ \sqrt{\varphi_2} = \dfrac{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(v_1 \mid v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}(v_1 \mid v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2)}. \end{cases}$$

Zusammenfassend hat man den Satz:

Werden in den Formeln (33), *bei constantem* $v_1 \mid v_2$, *die Parameter* $u_1 \mid u_2$ *einer der Gleichungen* (37) *und* (37′) *unterworfen, so stellen die Formeln beziehungsweise die Coordinaten der Punkte der Schnittcurve des Ellipsoides* $v_1 \mid v_2$ *oder* λ *mit den* 4 *Coordinatenebenen und den* 2 *Flächen* μ_0 *und* λ_0 *dar.*

Es bedarf kaum der Erwähnung, dass die Gleichstellung der beiden Flächen λ_0 und μ_0 mit den 4 Coordinatenebenen in der Natur der Parameter $u_1 \mid u_2$ ihren natürlichen Grund hat. Denn die elliptischen Coordinaten $-\infty$, γ, β, α und λ_0, μ_0 der 4 Ebenen einerseits und der beiden genannten Flächen andererseits sind in dem hyperelliptischen Gebilde z, Z durch die 6 völlig gleichberechtigten Windungspunkte vertreten.

§ 10.

Vertheilung der transcendenten Parameter auf die Punkte des äusseren Raumes.

Die Darstellung (34) des Ellipsoides λ_0 liefert zu jedem Parameterpaare $u_1 \mid u_2$ einen einzigen Punkt x, y, z, t. Dagegen gehören umgekehrt zu jedem Punkt x, y, z, t mehrere Parameterpaare. Da nämlich als die *gemeinsamen* Periodenpaare der Verhältnisse der 16 ϑ-Functionen

nicht die einfachen, sondern die *doppelten* Periodicitätsmoduln der Integrale $\int d\omega_1 \,|\, \int d\omega_2$ auftreten, also die Werthepaare:

$$2\pi i \,|\, 0, \qquad 0 \,|\, 2\pi i, \qquad 2a_{11} \,|\, 2a_{21}, \qquad 2a_{12} \,|\, 2a_{22},$$

so hat man bei der Betrachtung der ϑ-Quotienten im Allgemeinen die 16 Werthepaare auseinanderzuhalten, welche in der Form:

(39) $\quad u_1 + \varepsilon_1'\pi i + \varepsilon_1 a_{11} + \varepsilon_2 a_{12} \,|\, u_2 + \varepsilon_2'\pi i + \varepsilon_1 a_{21} + \varepsilon_2 a_{22}$

enthalten sind, insofern die 4 Zahlen $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_1, \varepsilon_2$ auf die 16 möglichen Weisen aus den Zahlen 0 und 1 ausgewählt werden. Ausserdem ist bei jeder Auswahl dieser Zahlen die vermöge der Unbestimmtheit der Vorzeichen von N und M in dem Parameterpaare

$$u_1 \,|\, u_2 = \int_\beta^{\nu, N} d\omega_1 - \int_\gamma^{\mu, M} d\omega_1 \,\Big|\, \int_\beta^{\nu, N} d\omega_2 - \int_\gamma^{\mu, M} d\omega_2$$

gelegene Vierdeutigkeit zu berücksichtigen. Es gehören daher, von Multiplis der *doppelten* Perioden abgesehen, zu jedem Werthepaare ν, μ 64 *Werthepaare* $u_1 \,|\, u_2$. Diese vertheilen sich auf die 8 zu ν, μ gehörigen Punkte der Fläche λ_0, und zwar so, dass die Verhältnisse der 4 ϑ-Functionen in (34) für je 8 der 64 Werthepaare $u_1 \,|\, u_2$ dieselben Werthe $x : y : z : t$ haben.

Im Allgemeinen kommen daher jedem Punkte x, y, z, t der Fläche λ_0 8 *Parameterpaare* $u_1 \,|\, u_2$ *zu, die nach den doppelten Perioden incongruent sind.*

Wenn die obern Grenzen ν und μ der vorliegenden Integrale mit den gewöhnlichen elliptischen Coordinaten ν und μ identificirt werden, so verlieren sie ihre unbegrenzte Variabilität. Beschränkt man im Besonderen die Betrachtung des Ellipsoides λ_0 auf die zwischen den beiden Zweigen der Durchdringungscurve mit dem Hyperboloid μ_0 gelegene Zone $(\mu_0\, \mu_0)$ des Ellipsoides, deren Punkte als Berührungspunkte *reeller* gemeinsamer Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 erscheinen, so entsprechen die elliptischen Coordinaten ν und μ den Ungleichungen (6), und können sich daher auch die Punkte ν, N und μ, M der Riemann'schen Fläche des Gebildes z, Z beziehungsweise nur zwischen den Verzweigungspunkten β und α oder γ und μ_0 bewegen. *Die Parameter* $u_1 \,|\, u_2$ *sind dann beständig rein imaginär.* Ueberdies beschränkt sich ihre Vieldeutigkeit auf die Vorzeichen von N und M und auf Multipla der rein imaginären Periodicitätsmoduln $0 \,|\, \pi i$ und $\pi i \,|\, 0$, welche den Umgängen der Variablen ν und μ um die Verzweigungspunkte β und α einerseits, γ und μ_0 andererseits entsprechen.

Bei dieser Beschränkung der Variablen ν und μ bleiben von den 64 Werthepaaren (39) nur 16, und von den 8 im Allgemeinen zu einem Punkte x, y, z, t gehörigen Parameterpaaren nur 2 übrig.

Es liefert dann auch umgekehrt *jedes Paar rein imaginärer Werthe* $u_1 \mid u_2$ *einen reellen äusseren Punkt des Ellipsoides* λ_0. Die quadratische Gleichung nämlich, von welcher die Lösungen $z = \nu$ und $z = \mu$ des Umkehrproblems:

$$\int_{\beta}^{\nu, N} d\omega_1 - \int_{\gamma}^{\mu, M} d\omega_1 \Big| \int_{\beta}^{\nu, N} d\omega_2 - \int_{\gamma}^{\mu, M} d\omega_2 = u_1 \mid u_2$$

abhängen, kann in folgenden 3 gleichberechtigten Formen gegeben werden*):

$$\frac{\vartheta^2\binom{0\ 0}{0\ 0}\vartheta^2\binom{0\ 1}{0\ 0}(u_1\ u_2)}{\vartheta^2\binom{0\ 1}{0\ 0}\vartheta^2\binom{0\ 0}{0\ 0}(u_1 \mid u_2)} \cdot \frac{\alpha-\gamma}{\alpha-z} + \frac{\vartheta^2\binom{0\ 0}{0\ 1}\vartheta^2\binom{0\ 1}{0\ 1}(u_1 \mid u_2)}{\vartheta^2\binom{0\ 1}{0\ 0}\vartheta^2\binom{0\ 0}{0\ 0}(u_1\ u_2)} \cdot \frac{\beta-\gamma}{\beta-z} = 1,$$

$$\frac{\vartheta^2\binom{0\ 0}{1\ 0}\vartheta^2\binom{0\ 1}{0\ 0}(u_1 \mid u_2)}{\vartheta^2\binom{0\ 1}{1\ 0}\vartheta^2\binom{0\ 0}{0\ 0}(u_1 \mid u_2)} \cdot \frac{\alpha-\beta}{\alpha-z} + \frac{\vartheta^2\binom{1\ 1}{1\ 1}\vartheta^2\binom{1\ 0}{0\ 1}(u_1\ u_2)}{\vartheta^2\binom{0\ 1}{1\ 0}\vartheta^2\binom{0\ 0}{0\ 0}(u_1 \mid u_2)} \cdot \frac{\beta-\mu_0}{\mu_0-z} = 1,$$

$$\frac{\vartheta^2\binom{0\ 0}{0\ 0}\vartheta^2\binom{0\ 1}{0\ 0}(u_1 \mid u_2)}{\vartheta^2\binom{0\ 1}{0\ 0}\vartheta^2\binom{0\ 0}{0\ 0}(u_1\ u_2)} \cdot \frac{\alpha-\beta}{\alpha-z} - \frac{\vartheta^2\binom{1\ 1}{1\ 1}\vartheta^2\binom{1\ 0}{1\ 1}(u_1 \mid u_2)}{\vartheta^2\binom{0\ 1}{0\ 0}\vartheta^2\binom{0\ 0}{0\ 0}(u_1 \mid u_2)} \cdot \frac{\beta-\gamma}{\gamma-z} = 1.$$

Nun ist bei rein imaginären Werthen der Argumente $u_1 \mid u_2$ und reellen Werthen der Moduln a_{11}, a_{12}, a_{22} die in § 8 definirte ϑ-Function für jede Charakteristik von reellem Werthe. Man schliesst daher nach einer aus der Theorie der elliptischen Coordinaten bekannten Schlussweise aus der 1. der 3 Gleichungen, dass von den Wurzeln $z = \nu$ und $z = \mu$ die eine zwischen den reellen Grenzen β und α, die andre zwischen den reellen Grenzen $-\infty$ und β liegt; aus der 2. Gleichung ebenso, dass die eine Wurzel zwischen μ_0 und α, die andre zwischen $-\infty$ und μ_0 liegt; aus der 3. Gleichung endlich, dass, wenn die eine Wurzel zwischen den reellen Grenzen γ und α liegt, dasselbe auch von der andern gilt. Die Verbindung dieser 3 Schlüsse führt zu der Einsicht, dass die eine Wurzel zwischen β und α, die andre zwischen γ und μ_0 eingeschränkt bleibt, womit die obige Behauptung bewiesen ist.

Zur näheren Orientirung über die nun eintretende Vertheilung der Parameterpaare $u_1 \mid u_2$ auf die Punkte der Zone $(\mu_0\, \mu_0)$ dienen die folgenden Sätze, die sich aus der Unterscheidung der geraden und ungeraden ϑ-Functionen, aus den Periodicitätseigenschaften der ϑ-Quotienten und aus der Betrachtung der einfachen Wurzelfunctionen $\sqrt{\alpha-\nu}$, $\sqrt{\nu-\beta}$, $\sqrt{\mu-\gamma}$, $\sqrt{\mu_0-\mu}$ und der entsprechenden ϑ-Quotienten auf der Riemann'schen Fläche ergeben.

*) Vgl. Weierstrass, zur Theorie der Abel'schen Functionen, Crelle's Journal, Bd. 47, S. 292.

I. *Die Vertauschung von* $u_1 \mid u_2$ *mit* $-u_1 \mid -u_2$ *bedeutet eine simultane Spiegelung an den Ebenen* $y = 0$ *und* $z = 0$ (vgl. Fig. 3).

II. *Der Vermehrung der Argumente* $u_1 \mid u_2$ *um* $0 \mid \pi i$ *entspricht eine simultane Spiegelung an den Ebenen* $x = 0$ *und* $y = 0$, *der Vermehrung der Argumente um* $\pi i \mid 0$ *eine Spiegelung an der Ebene* $z = 0$. Die Punkte $u_1 \mid u_2$ und $u_1 + 0 + \pi i \mid u_2 + \pi i + 0$ liegen also diametral.

III. *Die Aenderung des Vorzeichens von* M *in den Integraldifferenzen* $u_1 \mid u_2$ (vgl. die Definition (28)) *bewirkt eine Spiegelung an der Ebene* $z = 0$, *die Aenderung des Vorzeichens von* N *eine Spiegelung an der Ebene* $y = 0$.

IV. *Die Aenderung des Vorzeichens von* M *mit gleichzeitiger Vermehrung der Argumente* $u_1 \mid u_2$ *um* $\pi i \mid 0$ *lässt den Punkt* x, y, z, t *ungeändert, wechselt aber das Vorzeichen der Function* $\sqrt{\varphi_1}$ *in* (38); *die Aenderung des Vorzeichens von* N *mit gleichzeitiger Vermehrung der Argumente* $u_1 \mid u_2$ *um* $0 \mid \pi i$ *bedeutet eine Spiegelung an der Ebene* $x = 0$.

Bei diesen Sätzen, sowie bei den später anzuführenden Sätzen von ähnlicher Tendenz, liegt die *elementare* Auffassung der Integraldifferenzen $u_1 \mid u_2$ zu Grunde. Es sind also in:

$$u_1 \mid u_2 = \int_\beta^{\gamma, \pm N} d\omega_1 - \int_\gamma^{\mu, \pm M} d\omega_1 \Big| \int_\beta^{\gamma, \pm N} d\omega_2 - \int_\gamma^{\mu, \pm M} d\omega_2$$

die Integrationswege auf der reellen Axe von β resp. γ bis zum obern Grenzpunkt zu nehmen und zwar mit denjenigen Vorzeichen der Wurzeln $Z = \mathsf{N}$ resp. $Z = \mathsf{M}$, (vgl. (27)), welche den oberen Grenzen explicite beigeschrieben sind.

Es ist dann im Besonderen der Uebergang von $\int_\gamma^{\mu, +M} d\omega$ zu $\int_\gamma^{\mu, -M} d\omega$ so zu verstehen, dass der im oberen Blatte der Riemann'schen Fläche (vgl. die Festsetzungen in § 8) von γ bis μ, $+\mathsf{M}$ laufende Weg (vgl. Fig. 2, wo der betreffende Weg auf die reelle Axe zusammengezogen zu denken ist) wieder rückwärts gemacht, und hierauf der Weg von γ bis μ, $-\mathsf{M}$ im unteren Blatte angeschlossen wird. Dabei ändert die einfache Wurzelfunction $\sqrt{\mu - \gamma}$ ihr Vorzeichen, was der 1. Theil des Satzes III aussagt. In analoger Weise versteht man den 2. Theil des Satzes. Es ist ferner

Fig. 2

der Uebergang von $\int_\gamma^{\mu, +M} d\omega_1 \Big| \int_\gamma^{\mu, +M} d\omega_2$ zu $\int_\gamma^{\mu, -M} d\omega_1 - \pi i \Big| \int_\gamma^{\mu, -M} d\omega_2 - 0$ so zu denken, dass man von der Stelle μ, $+M$ im oberen Blatte den Weg bis γ zurückmacht, alsdann von γ im unteren Blatte bis μ_0, von hier im oberen wieder bis γ zurück und nochmals im unteren Blatte von γ bis μ, $-\mathsf{M}$ hinläuft. Dabei hat $\sqrt{\mu - \gamma}$ zweimal, $\sqrt{\mu_0 - \mu}$ einmal

das Vorzeichen gewechselt, was der 1. Theil des Satzes IV aussagt; der 2. Theil wird in ähnlicher Weise verständlich.

Die angeführten Sätze bestimmen die Vertheilung der Parameterpaare $u_1 \mid u_2$ auf die durch die ebenen Schnitte $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und die Krümmungscurven $\mu = \mu_0$ begrenzten 8 Felder der Zone $(\mu_0 \mu_0)$ des Ellipsoides λ_0, wenn man hinzunimmt, dass für die Argumente $u_1 \mid u_2 = \int_\beta^{\nu_1 + N} d\omega_1 - \int_\gamma^{\mu_1 + M} d\omega_1 \mid \int_\beta^{\nu_1 + N} d\omega_2 - \int_\gamma^{\mu_1 + M} d\omega_2$ die x, y, z alle positiv werden $(x = x : t,\ y = y : t,\ z = z : t)$. Die Form der den einzelnen Feldern zugehörigen Parameter ist in Fig. 3 angegeben, welche die Zone $(\mu_0 \mu_0)$ in schematischer Ausbreitung auf die Ebene vorstellt:

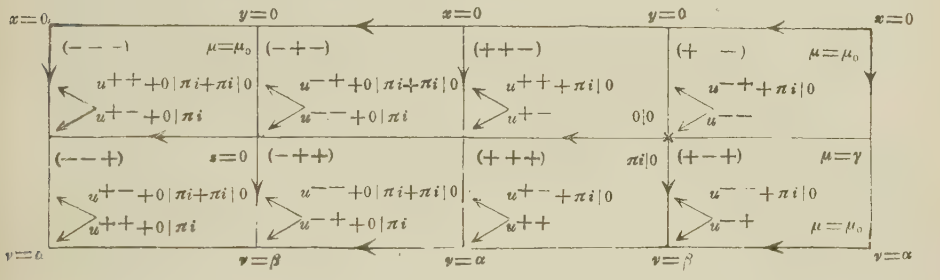

Fig. 3.

Dabei bedeuten die Symbole $u^{\pm\pm}$ die Parameter

$$u_1 \mid u_2 = \int_\beta^{\nu_1 \pm N} d\omega_1 - \int_\gamma^{\mu_1 \pm M} d\omega_1 \mid \int_\beta^{\nu_1 \pm N} d\omega_2 - \int_\gamma^{\mu_1 \pm M} d\omega_2,$$

und geben die obern Indices von $u^{\pm\pm}$ die entsprechend gestellten Vorzeichen von N und M. Unter dem Symbol $u + 0 \mid \pi i + \pi i \mid 0$ ist ferner das Parameterpaar $u_1 + 0 + \pi i \mid u_2 + \pi i + 0$ zu verstehen.

Die den einzelnen Feldern eingeschriebenen und in Klammern geschlossenen 3 Vorzeichen beziehen sich auf die Werthe der gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten x, y, z der Punkte der betreffenden Felder in dem Sinne, dass z. B. innerhalb des mit $(+ + -)$ markirten Feldes x und y positiv und z negativ ist.

Die den Grenzlinien $\mu = \mu_0$, $\mu = \gamma$ $(z = 0)$, $x = 0$, $y = 0$ der Felder beigefügten Pfeile charakterisiren die in § 2 festgesetzte positive Richtung dieser Linien. Die Winkelpfeile innerhalb der Felder werden in § 13 ihre Erklärung finden.

Die beiden einem Punkte zugehörigen Parameterpaare sind, von dem Periodenpaare $\pi i \mid 0$ abgesehen, im Vorzeichen von M unterschieden. Für die Mittellinie $\mu = \gamma$ der Zone $(\mu_0 \mu_0)$ fällt der Unterschied in dem Vorzeichen von M fort, indem $\mathsf{M} = 0$ wird, und die beiden Parameterpaare unterscheiden sich nur mehr um $\pi i \mid 0$.

Für $\mu = \mu_0$ fallen die beiden Parameterpaare eines Punktes in eines zusammen.

Den Punkten der Krümmungscurven $\nu = \beta$ und $\nu = \alpha$ entsprechen, wie im Allgemeinen, zwei verschiedene Parameterpaare.

Zusammenfassend erhält man das Resultat:

V. *Jedem Punkte der Zone* $(\mu_0\,\mu_0)$ *des Ellipsoides* λ_0 *kommen zwei mod.* $2\pi i\,|\,0$ *und* $0\,|\,2\pi i$ *verschiedene rein imaginäre Parameterpaare* $u_1\,|\,u_2$ *zu, die sich im Allgemeinen um* $\pi i\,|\,0$ *und, falls* M *nicht* 0 *ist, im Vorzeichen von* M *unterscheiden; die Punkte der Durchdringungscurve der Flächen* λ_0 *und* μ_0 *erhalten nur ein Parameterpaar.*

In analoger Weise, wie auf dem Ellipsoid λ_0, sind die Parameter $u_1\,|\,u_2$ auf die übrigen Ellipsoide λ des confocalen Systems vertheilt, sofern die Betrachtung derselben wiederum auf die von dem Hyperboloid μ_0 ausgeschnittenen Zonen beschränkt wird, von deren Punkten reelle gemeinsame Tangenten an die Flächen λ_0 und μ_0 gelegt werden können.

Man erkennt endlich durch Vergleich der gewonnenen Parametervertheilung mit den Betrachtungen des § 6:

VI. *In der oberen Grenze* ν, $\pm\,\mathsf{N}$ *der beiden einem äusseren Punkte des Ellipsoides* λ *zufallenden Parameterpaare* $u_1\,|\,u_2$ *ist* $\pm\,\mathsf{N}$ *einschliesslich seines Vorzeichens die dem Punkte zugehörige zusammengesetzte Wurzelfunction* N.

§ 11.

Darstellung der homogenen Ebenencoordinaten im Raume durch Producte zweier ϑ-Functionen.

Die transcendenten Parameter $u_1\,|\,u_2$, $v_1\,|\,v_2$, welche zur Darstellung der homogenen Punktcoordinaten x, y, z, t in den Formeln (33) benutzt wurden, gestatten in ganz analoger Form auch die homogenen Ebenencoordinaten ξ, η, ζ, τ auszudrücken, welche in § 3, 12 durch die elliptischen Coordinaten definirt wurden. Es bestehen nämlich zwischen den Parametern $v_1\,|\,v_2$, $u_1\,|\,u_2$ und den Wurzelfunctionen der λ, μ, ν auf Grund der Beziehungen (28) die folgenden Relationen*):

$$(a')\quad \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\alpha-\lambda_0}\sqrt{\alpha-\lambda}}{\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}} = \dfrac{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}(v_1\,|\,v_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}(v_1\,|\,v_2)}, \\ \dfrac{\sqrt{\beta-\lambda_0}\sqrt{\beta-\lambda}}{\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\beta-\gamma}} = \dfrac{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(v_1\,|\,v_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}(v_1\,|\,v_2)}, \\ \dfrac{\sqrt{\gamma-\lambda_0}\sqrt{\gamma-\lambda}}{\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}} = \dfrac{\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(v_1\,|\,v_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}(v_1\,|\,v_2)}, \end{cases}$$

*) Vgl. Prym, a. a. O. S. 68, 69. Rosenhain, a. a. O. S. 423.

und ferner:

$$(b')\quad \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}-\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}} \\ \qquad = \dfrac{\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}, \\ \dfrac{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}-\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}} \\ \qquad = \dfrac{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}, \\ \dfrac{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}-\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}} \\ \qquad = \dfrac{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}, \\ \dfrac{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}-\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}} \\ \qquad = \dfrac{\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}. \end{cases}$$

Führt man hiernach an Stelle der algebraischen Functionen der λ, μ, ν die ϑ-Functionen in die Definition der ξ, η, ζ, τ in (12) ein, so gelangt man zu dem Satze:

Die homogenen Coordinaten ξ, η, ζ, τ der Ebenen des Raumes stellen sich in Abhängigkeit von den 4 Parametern $v_1 \mid v_2$ und $u_1 \mid u_2$ in folgender Weise dar:

$$(43)\quad \begin{cases} \varkappa\cdot\sqrt{\alpha-\lambda_0}\cdot\xi = \vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}(v_1\mid v_2)\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2), \\ \varkappa\cdot\sqrt{\beta-\lambda_0}\cdot\eta = \vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(v_1\mid v_2)\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}(u_1\mid u_2), \\ \varkappa\cdot\sqrt{\gamma-\varkappa_0}\cdot\zeta = -\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(v_1\mid v_2)\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}(u_1\mid u_2), \\ \varkappa\cdot\tau = -\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}(v_1\mid v_2)\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2), \\ \vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}(v_1\mid v_2) = 0. \end{cases}$$

Die in diesen Formeln dargestellten Ebenen ξ, η, ζ, τ sind bei

constantem $v_1 \mid v_2$ die den einzelnen Punkten des Ellipsoides λ im Sinne des § 2 zugehörigen Normalebenen E_λ.

Die Formeln verlieren in der vorliegenden Form ihre Anwendbarkeit für das ausgezeichnete Ellipsoid λ_0, indem dann $v_1 \mid v_2 = 0 \mid 0$ wird, und die ϑ-Functionen der Variabeln $v_1 \mid v_2$ alle 4 verschwinden. Man kann indessen die Verhältnisse dieser 4 ungeraden ϑ-Functionen durch die Verhältnisse von 4 geraden ϑ-Functionen ersetzen. Dazu bedient man sich solcher dreigliedriger Productrelationen*) zwischen den ϑ-Functionen, welche die Function $\vartheta \begin{pmatrix} 1\,1 \\ 0\,1 \end{pmatrix}(v_1 \mid v_2)$ enthalten und wegen des Verschwindens dieser Function für die vorliegenden Variabeln auf 2 Glieder herabkommen. Es ergeben sich dann die weniger einfachen Formeln:

$$(43)' \quad \begin{cases} & \varkappa' \cdot \sqrt{\alpha - \lambda_0} \cdot \xi \\ = & \vartheta \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 1\,0 \end{pmatrix} \cdot \vartheta \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,1 \end{pmatrix} \cdot \vartheta \begin{pmatrix} 1\,1 \\ 0\,0 \end{pmatrix} \cdot \vartheta \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 0\,0 \end{pmatrix}(v_1 \mid v_2) \cdot \vartheta \begin{pmatrix} 1\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix}(u_1 \mid u_2), \\ & \varkappa' \cdot \sqrt{\beta - \lambda_0} \cdot \eta \\ = & \vartheta \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,0 \end{pmatrix} \cdot \vartheta \begin{pmatrix} 1\,1 \\ 0\,0 \end{pmatrix} \cdot \vartheta \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 1\,1 \end{pmatrix} \cdot \vartheta \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 0\,1 \end{pmatrix}(v_1 \mid v_2) \cdot \vartheta \begin{pmatrix} 1\,1 \\ 1\,1 \end{pmatrix}(u_1 \mid u_2), \\ & \varkappa' \cdot \sqrt{\gamma - \lambda_0} \cdot \zeta \\ = & -\vartheta \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 1\,0 \end{pmatrix} \cdot \vartheta \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 1\,1 \end{pmatrix} \cdot \vartheta \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix} \cdot \vartheta \begin{pmatrix} 1\,1 \\ 1\,1 \end{pmatrix}(v_1 \mid v_2) \cdot \vartheta \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 0\,1 \end{pmatrix}(u_1 \mid u_2), \\ & \varkappa' \cdot \tau \\ = & -\vartheta \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,0 \end{pmatrix} \cdot \vartheta \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix} \cdot \vartheta \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,1 \end{pmatrix} \cdot \vartheta \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 0\,0 \end{pmatrix}(v_1 \mid v_2) \cdot \vartheta \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 1\,0 \end{pmatrix}(u_1 \mid u_2), \end{cases}$$

die auch für $v_1 \mid v_2 = 0 \mid 0$ unmittelbar anwendbar bleiben.

Die Ausdrücke (12) des § 2 ergaben für $\mu = \mu_0$ bei variabel bleibendem ν und λ die Tangentialebenen des Hyperboloides μ_0; die Coordinaten ξ, η, ζ, τ der letzteren gehen daher aus (43) hervor, wenn $u_1 \mid u_2$ der Bedingung genügen (vgl. § 9):

$$\vartheta \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,1 \end{pmatrix}(u_1 \mid u_2) = 0. \tag{44}$$

Aehnlich könnte man in der Gleichung:

$$\vartheta \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 1\,1 \end{pmatrix}(u_1 \mid u_2) = 0 \tag{44'}$$

*) Vgl. Weber, Crelle's Journal, Bd. 84, S. 336, Formelsystem B; ferner: Krazer, a. a. O., S. 39, Formelsystem (C_4).

die Tangentialgleichung des Ellipsoides λ_0 mit Bezug auf die Formeln (43) erblicken. Hierzu mag zum Vergleiche mit den entsprechenden Betrachtungen des § 9 bemerkt werden, dass die 4 ϑ-Functionen der Argumente $u_1 \mid u_2$ in (43) zusammen mit den beiden unter (44), (44′) auftretenden ϑ-Functionen wiederum ein Rosenhain'sches Sechsersystem bilden.

Die Darstellung (43) der homogenen Ebenencoordinaten im Raume liefert zu jedem Parametersystem $v_1 \mid v_2$, $u_1 \mid u_2$ eine einzige Ebene. Dagegen gehören, wenn man selbst $v_1 \mid v_2$ als constant ansieht, *bei unbeschränkter Variabilität von* $u_1 \mid u_2$ *zu jeder Ebene* 4 *Parameterpaare* $u_1 \mid u_2$.

Beschränkt man aber, wie in § 10, die obern Grenzen ν und μ der Integraldifferenzen $u_1 \mid u_2$ durch die Ungleichungen (6), sodass bei gegebenem ν und μ nur noch 16 incongruente Parameterpaare $u_1 \mid u_2$ (mod. $2\pi i \mid 0$ und $0 \mid 2\pi i$) hervorgehen, so kommt auf jede der 16 einem Werthepaare ν, μ entsprechenden Ebenen ξ, η, ζ, τ *nur mehr ein Werthepaar* $u_1 \mid u_2$.

Um die Vertheilung der *beschränkten Parameterpaare* $u_1 \mid u_2$ auf die Normalebenen E_λ in den Punkten der Zone $(\mu_0\, \mu_0)$ eines festen Ellipsoides und zugleich den Zusammenhang der Parameterdarstellungen (33) und (43) zu übersehen, hat man die wechselseitige Abhängigkeit der Vorzeichen in den Formeln (b) und (b′) der §§ 9 und 11 zu beachten, welche, solange ν und μ den Ungleichungen (6) entsprechen, den folgenden Regeln gehorcht:

I. *Bedeutet in den beiden Formelsystemen* (b) *und* (b′) $u_1 \mid u_2$ *das nämliche der* 16 *rein imaginären und nach den doppelten Perioden incongruenten Werthepaare* $u_1 \mid u_2$, *die zu gegebenem* ν, μ *gehören, so haben auch die Quadratwurzeln* $\sqrt{\alpha - \nu}$, $\sqrt{\nu - \beta}$, $\sqrt{\mu - \gamma}$ *in beiden Formelsystemen die nämlichen* (*impliciten*) *Vorzeichen.* (Dabei gelten mit Ausnahme der 3 genannten und der Wurzel $\sqrt{\mu_0 - \mu}$, wie früher, alle einzelnen Wurzeln positiv).

II. *Die Aenderung des Vorzeichens von* M *in den obern Grenzen der* $u_1 \mid u_2$ *mit gleichzeitiger Zufügung der Perioden* $\pi i \mid 0$, *welche die linken Seiten der Formeln* (b) *ungeändert lässt, ändert in den Formeln* (b′) *durchgehends das Vorzeichen von* $\sqrt{\mu_0 - \mu}$ (vgl. § 10, IV).

Was endlich die Formeln (b′) für sich angeht, so gilt noch ferner:

III. *Jenachdem in den oberen Grenzen der Integrale* $u_1 \mid u_2$ *die Wurzelfunction* M *positiv oder negativ ist, sind auf den linken Seiten der Formeln die Wurzelfunctionen* $\sqrt{\mu - \gamma}$ *und* $\sqrt{\mu_0 - \mu}$ *von gleichem oder entgegengesetztem Vorzeichen.*

Aus diesem Verhalten der Formelsysteme (b) und (b′) geht in Rücksicht auf die zur Definition der ξ, η, ζ, τ in (12) gemachten Bemerkungen hervor:

IV. *Die den Normalebenen E_λ eines äusseren Punktes des Ellipsoides λ für die Darstellung* (43) *zugehörigen Parameterpaare $u_1 \mid u_2$ sind zugleich die beiden dem Punkte selbst für die Darstellung* (33) *zugehörigen Punktepaare $u_1 \mid u_2$.*

Die beiden Normalebenen E_λ enthalten je 2 der durch P gehenden Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0. Den Anfangselementen dS je zweier in derselben Ebene gelegenen Tangenten gehören auch dieselben zusammengesetzten Wurzelfunctionen N und M zu (vgl. § 6). Demnach ergiebt sich mit Hinblick auf Satz III:

V. *In den oberen Grenzen $\nu, \pm \mathsf{N}$ und $\mu, \pm \mathsf{M}$ des Parameterpaares $u_1 \mid u_2$ einer Ebene E_λ im Punkte P sind $\pm \mathsf{N}$ und $\pm \mathsf{M}$ einschliesslich der gerade geltenden Vorzeichen diejenigen zusammengesetzten Wurzelfunctionen N und M, welche dem Punkte P als einem Punkte der in E_λ enthaltenen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 angehören.*

Da der Punkt λ, μ, ν in jeder der beiden zugehörigen Normalebenen E_λ gelegen ist und als Punkt einer jeden von ihnen, je die nämlichen Parameter, wie die Ebene, besitzt, so muss *die Bedingung* (11) *der vereinigten Lage von Punkt und Ebene* mit Substitution der Werthe (33) und (43) für x, y, z, t und ξ, η, ζ, τ in Bezug auf $v_1 \mid v_2$ und $u_1 \mid u_2$ identisch erfüllt sein, solange $v_1 \mid v_2$ der Bedingung (32) genügt.

In der That besteht zwischen den ϑ-Functionen der Formelsysteme (33) und (43) die *identische Relation**):

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned}
&\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(v_1|v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}(v_1|v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(u_1|u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}(u_1|u_2)\\
&+\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)\\
&-\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)\\
&-\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(v_1|v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}(v_1|v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1|u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}(u_1|u_2)=0,
\end{aligned}\right.$$

deren *geometrische Bedeutung* für das confocale Flächensystem hiermit gegeben ist.

§ 12.

Darstellung der homogenen Liniencoordinaten der gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 durch ϑ-Functionen.

Vermöge der in § 8 gesetzten Beziehung zwischen den elliptischen Coordinaten ν, μ und den Integraldifferenzen $u_1 \mid u_2$ lassen sich in den Formeln (18) die Variabeln ν, μ durch die Parameter $u_1 \mid u_2$ ersetzen. Dazu dienen die Formeln:

*) Vgl. Krazer, a. a. O. S. 37, Formelsystem C_2.

$$
(b'')\quad
\begin{cases}
+\dfrac{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}+\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\mu_0-\lambda_0}} \\
\qquad = +\dfrac{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}, \\
-\dfrac{\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}-\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\beta-\gamma}\sqrt{\mu_0-\lambda_0}} \\
\qquad = -\dfrac{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}, \\
-\dfrac{\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}+\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}\sqrt{\mu_0-\lambda_0}} \\
\qquad = -\dfrac{\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}, \\
-\dfrac{\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}-\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\mu_0-\lambda_0}} \\
\qquad = +\dfrac{\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}, \\
-\dfrac{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}+\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\beta-\gamma}\sqrt{\mu_0-\lambda_0}} \\
\qquad = -\dfrac{\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}, \\
+\dfrac{\sqrt{\alpha-\mu}\sqrt{\beta-\mu}\sqrt{\nu-\gamma}\sqrt{\mu-\lambda_0}\sqrt{\nu-\mu_0}-\sqrt{\alpha-\nu}\sqrt{\nu-\beta}\sqrt{\mu-\gamma}\sqrt{\nu-\lambda_0}\sqrt{\mu_0-\mu}}{(\nu-\mu)\sqrt{\alpha-\gamma}\sqrt{\beta-\gamma}\sqrt{\mu_0-\lambda_0}} \\
\qquad = +\dfrac{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)}.
\end{cases}
$$

Indem man dieselben mit den Formeln (18) verbindet, gewinnt man das Resultat:

Die 6 homogenen Liniencoordinaten einer gemeinsamen Tangente der Flächen λ_0 und μ_0 stellen sich in Abhängigkeit von den Parametern $u_1 \mid u_2$ in folgender Weise dar:

$$(46)\quad \begin{cases} \varkappa\cdot\dfrac{p_{12}}{\sqrt{\alpha-\lambda_0}} = +\,\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}(u_1\mid u_2), \\ \varkappa\cdot\dfrac{p_{13}}{\sqrt{\beta-\lambda_0}} = -\,\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2), \\ \varkappa\cdot\dfrac{p_{14}}{\sqrt{\gamma-\lambda_0}} = -\,\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2), \\ \varkappa\cdot\dfrac{p_{34}}{\sqrt{\beta-\lambda_0}\sqrt{\gamma-\lambda_0}} = +\,\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}(u_1\mid u_2), \\ \varkappa\cdot\dfrac{p_{42}}{\sqrt{\gamma-\lambda_0}\sqrt{\alpha-\lambda_0}} = -\,\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2), \\ \varkappa\cdot\dfrac{p_{23}}{\sqrt{\alpha-\lambda_0}\sqrt{\beta-\lambda_0}} = +\,\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2). \end{cases}$$

Um die gleichberechtigte Beziehung der gemeinsamen Tangenten zu der einen und der anderen der beiden Flächen λ_0 und μ_0 auch analytisch zum Ausdruck zu bringen, hat man zu bemerken, dass in Folge der Gleichungen:

$$\frac{\sqrt{\alpha-\lambda_0}}{\sqrt{\alpha-\mu_0}} = \frac{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}}{\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}, \qquad \frac{\sqrt{\beta-\lambda_0}}{\sqrt{\beta-\mu_0}} = \frac{\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}},$$

$$\frac{\sqrt{\gamma-\lambda_0}}{\sqrt{\mu_0-\gamma}} = \frac{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}}{\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}$$

die Darstellung (46) auch in folgender Form gegeben werden kann:

$$(46')\quad \begin{cases} \varkappa'\cdot\dfrac{p_{12}}{\sqrt{\alpha-\mu_0}} = +\,\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}(u_1\mid u_2), \\ \varkappa'\cdot\dfrac{p_{13}}{\sqrt{\beta-\mu_0}} = -\,\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2), \\ \varkappa'\cdot\dfrac{p_{14}}{\sqrt{\mu_0-\gamma}} = -\,\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2), \\ \varkappa'\cdot\dfrac{p_{34}}{\sqrt{\beta-\mu_0}\sqrt{\mu_0-\gamma}} = +\,\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}(u_1\mid u_2), \\ \varkappa'\cdot\dfrac{p_{12}}{\sqrt{\mu_0-\gamma}\sqrt{\alpha-\mu_0}} = -\,\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2), \\ \varkappa'\cdot\dfrac{p_{23}}{\sqrt{\alpha-\mu_0}\sqrt{\beta-\mu_0}} = +\,\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2), \end{cases}$$

bei der gegen die frühere Form (46) die Nullwerthe der ϑ-Functionen in den 3 ersten und den 3 letzten Zeilen entsprechend vertauscht sind.

Dieser Umstand bewirkt, dass die zwischen den Liniencoordinaten bestehende identische Gleichung:

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0,$$

gleichviel ob man die eine oder andere Darstellungsform, (46) oder (46′), substituirt, in die nämliche *identische ϑ-Relation**):

$$(17)\quad \begin{cases} \vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\1\,1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\0\,1\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\1\,1\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\0\,1\end{pmatrix}(u_1\mid u_2) \\ +\vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\1\,0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\0\,0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\1\,0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\0\,0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2) \\ -\vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\0\,0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\1\,0\end{pmatrix}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\0\,0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\1\,0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2) = 0 \end{cases}$$

übergeht.

Dass die Darstellung (46), (46′) auch den beiden Gleichungen (17) der Liniencongruenz genügt, beruht auf den durch die Substitution (46) resp. (46′) in die 2. resp. 3. Gleichung (17) hervorgehenden *identischen ϑ-Relationen:*

$$(48)\quad \begin{cases} \vartheta^2\begin{pmatrix}0\,0\\1\,1\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{pmatrix}0\,1\\1\,1\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)+\vartheta^2\begin{pmatrix}0\,0\\1\,0\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{pmatrix}0\,1\\1\,0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2) \\ +\vartheta^2\begin{pmatrix}1\,1\\0\,0\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{pmatrix}1\,0\\0\,0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)-\vartheta^2\begin{pmatrix}1\,0\\0\,1\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{pmatrix}1\,1\\0\,1\end{pmatrix}(u_1\mid u_2) \\ -\vartheta^2\begin{pmatrix}1\,0\\0\,0\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{pmatrix}1\,1\\0\,0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)-\vartheta^2\begin{pmatrix}0\,1\\1\,0\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{pmatrix}0\,0\\1\,0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)=0, \\ \vartheta^2\begin{pmatrix}1\,0\\0\,1\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{pmatrix}0\,1\\1\,1\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)+\vartheta^2\begin{pmatrix}1\,0\\0\,0\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{pmatrix}0\,1\\1\,0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2) \\ -\vartheta^2\begin{pmatrix}0\,1\\1\,0\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{pmatrix}1\,0\\0\,0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)+\vartheta^2\begin{pmatrix}0\,0\\1\,1\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{pmatrix}1\,1\\0\,1\end{pmatrix}(u_1\mid u_2) \\ +\vartheta^2\begin{pmatrix}0\,0\\1\,0\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{pmatrix}1\,1\\0\,0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)-\vartheta^2\begin{pmatrix}1\,1\\0\,0\end{pmatrix}\cdot\vartheta^2\begin{pmatrix}0\,0\\1\,0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)=0. \end{cases}$$

Was die 3 Relationen (47) und (48) angeht, so sind dieselben nur eine einfachere Combination

(49) *dreier simultaner Göpel'scher Relationen***),

die je 2 der in der Relation (47) auftretenden 3 Paare von ϑ-Functionen verbinden.

Demnach ergiebt sich:

---

*) Weber, a. a. O., S. 336, Formelsystem *B.* Krazer, a. a. O., S. 39, Formelsystem C_4.

**) Göpel, Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis, Crelle's, Journal Bd. 35, S. 292. — Krazer, a. a. O., S. 55, Formelsystem IV′. Die Relationen (49) sind wegen ihrer weitläufigen Form nicht explicite angegeben.

Die Darstellung der speciellen Liniencongruenz 4. Ordnung und 4. Classe, welche von den gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 gebildet wird, gründet sich auf ein System dreier Göpel'scher biquadratischer Relationen zwischen 3 Paaren von ϑ-Functionen, welches in der einfacheren Form (47), (48) *geschrieben werden kann.*

In der Darstellung (46) ist im Besonderen die Darstellung der von den Tangenten der Durchdringungscurve der Flächen λ_0 und μ_0 gebildeten *developpablen Fläche 8. Ordnung* enthalten. Es gilt nämlich mit Zuziehung früherer Resultate (vgl. § 9, 37′) der Satz (vgl. Satz I des folgenden Paragraphen):

Wenn zwischen den Parametern $u_1 \mid u_2$ die Relation:

$$\vartheta \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,1 \end{pmatrix} (u_1 \mid u_2) = 0$$

besteht, so geben die Gleichungen (46), (46′) *die Liniencoordinaten der Tangenten der Durchdringungscurve der Flächen λ_0 und μ_0.*

§ 13.

Vertheilung der transcendenten Parameter auf die Tangenten der beiden Flächen λ_0 und μ_0.

Die Darstellung der Liniencongruenz der gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 ist im Allgemeinen dadurch charakterisirt, dass zu jedem Parameterpaare $u_1 \mid u_2$ ein Congruenzstrahl, aber zu jedem Strahle 4 nach den doppelten Perioden incongruente Parameterpaare vom Typus:

$$u_1 \mid u_2, \qquad u_1 + \pi i + a_{11} \mid u_2 + 0 + a_{21},$$
$$-u_1 + a_{12} \mid -u_2 + a_{22}, \qquad -u_1 + \pi i + a_{11} + a_{12} \mid u_2 + 0 + a_{21} + a_{22}$$

gehören.

Im reellen Gebiete des mit Bezug auf die Flächen λ_0 und μ_0 äusseren Raumes aber fällt, unter der früheren Beschränkung der Parameterpaare $u_1 \mid u_2$, auf jeden Strahl nur *ein* Parameterpaar.

Wenn bei dieser letzteren Auffassung in der Formel (b″) des § 12, ebenso wie in den Formeln (b′) und (b) der §§ 11 und 9, mit Ausnahme der 4 Wurzelfunctionen $\sqrt{\alpha - \nu}$, $\sqrt{\nu - \beta}$, $\sqrt{\mu - \gamma}$, $\sqrt{\mu_0 - \mu}$ alle einfachen Wurzelfunctionen positiv genommen werden, so gelten über die Zusammengehörigkeit der transcendenten Parameter und der Wurzelfunctionen wiederum die in § 11 über die Formeln (b′) gegebenen Sätze I bis III. Es geht daher mit Zuziehung der zu der Definition (18) der Liniencoordinaten gemachten Bemerkung unmittelbar hervor:

I. *Diejenigen Parameterpaare, welche den beiden in einem Punkte P des Ellipsoides λ_0 berührenden Congruenzstrahlen für die Darstellungen*

(46), (46′) *zugehören, sind die beiden Parameterpaare des Berührungspunktes für die Darstellung* (34).

II. *In den oberen Grenzen* v, $\pm \mathsf{N}$ *und* μ, $\pm \mathsf{M}$ *der Integrale des Parameterpaares* $u_1 \mid u_2$ *einer gemeinsamen Tangente der Flächen* λ_0 *und* μ_0 *sind* $\pm \mathsf{N}$ *und* $\pm \mathsf{M}$ *einschliesslich der gerade geltenden Vorzeichen diejenigen zusammengesetzten Wurzelfunctionen* N *und* M, *welche dem Berührungspunkte mit der Fläche* λ_0 *als einem Punkte der Tangente im Sinne des* § 6 *zugehören.*

In Fig. 3 (§ 10) ist durch die Winkelpfeile innerhalb der einzelnen Felder der Zone $(\mu_0\, \mu_0)$ des Ellipsoides λ_0 die Vertheilung der beiden Parameterpaare des Berührungspunktes auf die beiden zugehörigen Tangenten angegeben; es gehört der je in der 1. Zeile stehende Typus von $u_1 \mid u_2$ zu der Tangente, welche mit der Krümmungscurve $v = v$ einen stumpfen Winkel bildet; der in der 2. Zeile stehende Typus zu der Tangente, die mit derselben Krümmungscurve einen spitzen Winkel bildet.

Ist x, y, z, t der Berührungspunkt der Tangente p_{ik} mit dem Ellipsoid λ_0, so hat man als analytische Folgen der *vereinigten Lage von Punkt und Strahl die Gleichungen:*

$$\begin{aligned} xp_{34} + yp_{42} + zp_{23} &= 0, \\ yp_{14} - zp_{13} + tp_{34} &= 0, \\ zp_{12} - xp_{14} + tp_{42} &= 0, \\ xp_{13} - yp_{12} + tp_{23} &= 0. \end{aligned}$$

In diesen erkennt man, wenn die gemeinsamen Parameter $u_1 \mid u_2$ von Punkt und Strahl durch die Darstellungen (34) und (46) eingeführt werden, die *identischen* ϑ*-Relationen:*

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2) \cdot \vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2) \\ -\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2) \cdot \vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2) \\ +\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \cdot \vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2) \cdot \vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}(u_1 \mid u_2) = 0 \end{array} \right.$$

u. s. w.,

deren *geometrische Bedeutung* im confocalen Flächensystem hiermit gegeben ist.

Am Schlusse dieses Kapitels II sei es gestattet, einen kurzen *Rückblick* auf die Resultate desselben zu werfen.

Es ergab sich zuerst die *Darstellung der Punkte* (Formeln (33)) und *Ebenen des Raumes* (43) durch *vier* transcendente Parameter, von denen 2 durch eine Relation (32) von einander abhängig waren.

Aus diesen Darstellungen ging im Besonderen die *Darstellung der Punkte der Fläche* λ_0 (34) und *der beiden Normalebenen* dieser Punkte ((43′) mit $v_1 | v_2 = 0 | 0$) durch *zwei* transcendente Parameter hervor. Hieran schloss sich die *Darstellung* (46), (46′) *der Liniencongruenz der gemeinsamen Tangenten der Flächen* λ_0 *und* μ_0 an. Mit den Formeln (34), (38) und (43′) für $v_1 \mid v_2 = 0 \mid 0$ und (46) wurde die *vollständige Deutung der* 16 ϑ*-Functionen der Argumente* $u_1 \mid u_2$ *im confocalen Flächensysteme* erreicht.

An diese Deutung reiht sich die Frage nach der *Bedeutung der identischen* ϑ*-Relationen im confocalen Flächensysteme* an. Auch die Beantwortung dieser Frage wurde im vorliegenden Kapitel begonnen.

Als Repräsentant der *quadratischen Relationen zwischen je* 4 ϑ*-Functionen eines Rosenhain'schen Sechsersystems* erscheint die Relation (35) mit ihrer Bedeutung für die *Darstellung der Fläche* 2. *Grades.* Als Repräsentanten der *Göpel'schen biquadratischen Relationen* zwischen 4 ϑ-Functionen bilden die unter (49) angedeuteten Relationen die Grundlage für die *Darstellung der speciellen Liniencongruenz* 4. *Ordnung und* 4. *Classe.*

Endlich sind die *vier- und dreigliedrigen Productrelationen* mit beziehungsweise 2 und einem Paare von Variablen durch die Formeln (45) und (50) mit ihren geometrischen Bedeutungen für die *vereinigte Lage gewisser Raumelemente* vertreten.

Kapitel III.

Bedeutung der Additionstheoreme der hyperelliptischen Integrale im System der confocalen Flächen.

§ 14.

Die Addition der transcendenten Parameter.

Von einem äusseren Punkte $P = \lambda, \mu, \nu = x, y, z$ eines Ellipsoides, dessen Parameter λ der Bedingung $\lambda < \lambda_0$ entspricht, seien die 4 gemeinsamen Tangenten an die Flächen λ_0 und μ_0 gezogen; die Berührungspunkte mit dem Ellipsoid λ_0 seien in der gemeinsamen Bezeichnung $P' = \lambda_0 \mu' \nu' = x', y', z'$ zusammengefasst.

Die Gleichungen einer der beiden dem Punkte P zugehörigen Normalebenen E_λ, welche die 4 Tangenten PP' enthalten, ist nach § 3, 11 in laufenden (nicht homogenen) Punktcoordinaten x', y', z':

$$\xi x' + \eta y' + \zeta z' + \tau = 0,$$

wo ξ, η, ζ, τ als die homogenen Coordinaten der Ebene E_λ durch die Formeln (12) definirt wurden. Es ist ferner:

$$\frac{xx'}{\alpha-\lambda_0}+\frac{yy'}{\beta-\lambda_0}+\frac{zz'}{\gamma-\lambda_0}-1=0$$

die Polarebene E_0 des Punktes P in Bezug auf das Ellipsoid λ_0. Die Schnittlinie der beiden Ebenen E_λ und E_0 trifft das Ellipsoid λ_0 oder

$$\frac{x'^2}{\alpha-\lambda_0}+\frac{y'^2}{\beta-\lambda_0}+\frac{z'^2}{\gamma-\lambda_0}-1=0$$

in den Berührungspunkten P' der beiden in der Ebene E_λ enthaltenen gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 durch den Punkt P. Es folgt also:

I. *Sind x, y, z die gewöhnlichen Coordinaten eines äusseren Punktes P und ξ, η, ζ, τ die homogenen Coordinaten einer der beiden ihm zugehörigen Normalebenen E_λ, so bestimmen sich die Coordinaten x', y', z' der Berührungspunkte P' der beiden durch den Punkt P gehenden und in der Ebene E_λ enthaltenen gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 mit dem Ellipsoid λ_0 durch die Gleichungen:*

$$(51)\qquad \begin{cases} \xi x'+\eta y'+\zeta z'+\tau=0, \\ \dfrac{xx'}{\alpha-\lambda_0}+\dfrac{yy'}{\beta-\lambda_0}+\dfrac{zz'}{\gamma-\lambda_0}-1=0, \\ \dfrac{x'^2}{\alpha-\lambda_0}+\dfrac{y'^2}{\beta-\lambda_0}+\dfrac{z'^2}{\gamma-\lambda_0}-1=0. \end{cases}$$

Bezeichnet man nun mit $v_1 \mid v_2$, $u_1 \mid u_2$, die Parameter, welche der Punkt P mit der Ebene E_λ gemein hat, und mit $u_1' \mid u_2'$ die Parameter der beiden Punkte P', und führt mittels der Formeln (33), (34) und (43) diese Parameter in die Gleichungen (51) ein, so wird die dritte Gleichung identisch erfüllt, während die beiden anderen die Form erhalten:

$$(52)\qquad \begin{cases} \quad \vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(u_1'\mid u_2') \\ +\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(u_1'\mid u_2') \\ -\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(u_1'\mid u_2') \\ -\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2')=0, \\ \quad \vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(u_1'\mid u_2') \\ +\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(u_1'\mid u_2') \\ +\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(u_1'\mid u_2') \\ -\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1'\mid u_2')=0. \end{cases}$$

Durch Vergleich dieser Formeln mit den folgenden Additionsformeln der ϑ-Functionen*):

$$
(53)\quad \left\{\begin{aligned}
&\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(u_1\pm v_1\mid u_2\pm v_2)\\
&+\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(u_1\pm v_1\mid u_2\pm v_2)\\
&-\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(u_1\pm v_1\mid u_2\pm v_2)\\
&-\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\pm v_1\mid u_2\pm v_2)=0,\\
&\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(u_1\pm v_1\mid u_2\pm v_2)\\
&+\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(u_1\pm v_1\mid u_2\pm v_2)\\
&+\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(u_1\pm v_1\mid u_2\pm v_2)\\
&-\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\pm v_1\mid u_2\pm v_2)=0,
\end{aligned}\right.
$$

ergiebt sich, dass die Gleichungen (52) bei gegebenem $v_1 \mid v_2$, $u_1 \mid u_2$ für $u_1' \mid u_2'$ die beiden Lösungen $u_1' \mid u_2' = u_1 \pm v_1 \mid u_2 \pm v_2$ zulassen. Mit Rücksicht auf die geometrische Bedeutung der Gleichungen (52) ergiebt sich hieraus der Satz**):

II. *Sind $v_1 \mid v_2$, $u_1 \mid u_2$ die Parameter, welche ein äusserer Punkt P mit einer der beiden ihm zugehörigen Normalebenen E_λ gemein hat, so haben die Berührungspunkte P' der in dieser Ebene gelegenen gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 mit dem Ellipsoid λ_0 beziehungsweise die Parameterpaare:*

$$u_1' \mid u_2' = u_1 \pm v_1 \mid u_2 \pm v_2. \tag{54}$$

Es verdient dabei hervorgehoben zu werden, dass jede der Gleichungen (52) für sich allein bei constantem $v_1 \mid v_2$, $u_2 \mid u_2$ einen *ebenen Schnitt* des Ellipsoides λ_0 in laufenden Parametern $u_1' \mid u_2'$ des Ellipsoides darstellt.

§ 15.

Das Additionstheorem der Integrale 1. Gattung.

Was den im vorigen Paragraphen gefundenen Satz II angeht, so gehören sowohl zu dem Punkte P des Ellipsoides λ, wie auch zu den Punkten P' des Ellipsoides λ_0 je *zwei* Parameterpaare $u_1 \mid u_2$; die

*) Vgl. Krazer, a. a. O. S. 34, Formelsystem B_1.

**) Vgl. die Behandlung des analogen Satzes der Kegelschnittstheorie bei Enneper, Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte, S. 499.

beiden Parameterpaare des Punktes P vertheilen sich auf die Normalebenen E_λ im Punkte P, die der Punkte P' auf die gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 in den Punkten P'. Um in dieser Beziehung die Angaben des Satzes II zu vervollständigen und zu ermitteln, welches der beiden Parameterpaare eines Punktes P' den Werth (54) erhält, bedient man sich der Differentialgleichungen (20) des § 5.

Dem Punkte P kommen nach § 6 vier verschiedene Systeme zusammengesetzter Wurzelfunctionen $\mathsf{N}, \mathsf{M}, \Lambda$ zu, die sich auf die Elemente dS der 4 durch den Punkt gehenden gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 vertheilen. Die Differentialgleichungen der 4 Tangenten sind in der gemeinsamen Form:

$$\frac{v^{\varkappa-1}dv}{\mathsf{N}} - \frac{\mu^{\varkappa-1}d\mu}{\mathsf{M}} + \frac{\lambda^{\varkappa-1}d\lambda}{\Lambda} = 0, \qquad \varkappa = 1, 2,$$

enthalten, wo $\mathsf{N}, \mathsf{M}, \Lambda$ jeweils die dem Punkte P als einem Punkte der betrachteten Tangente zugehörigen zusammengesetzten Wurzelfunctionen bedeuten.

Diese Differentialgleichungen mag man sich für jedes Element der Tangente PP' niedergeschrieben und alsdann die succesiven Gleichungen addirt denken; man integrirt mit anderen Worten die Differentialgleichungen längs der Tangente von P bis P' hin. Das Resultat der Integration:

$$\int_{v,N}^{v',N'} \frac{v^{\varkappa-1}dv}{\mathsf{N}} - \int_{\mu,M}^{\mu',M'} \frac{\mu^{\varkappa-1}d\mu}{\mathsf{M}} + \int_{\lambda,\Lambda}^{\lambda_0} \frac{\lambda^{\varkappa-1}d\lambda}{\Lambda} = 0, \qquad \varkappa = 1, 2,$$

giebt zwei Relationen zwischen den elliptischen Coordinaten v, μ und v', μ' der Punkte P und P'. Die Integration ist, wie ihre ausdrücklich hervorgehobene Zergliederung erkennen lässt, für alle 3 Integrale in der Weise auszuführen, dass für jeden Punkt der betreffenden Tangente PP' die dem Punkte als einem Punkte dieser Tangente zugehörigen Wurzelfunctionen $\mathsf{N}, \mathsf{M}, \Lambda$ einschliesslich ihrer Vorzeichen in Rechnung gezogen werden. *Demnach sind im Besonderen unter* N', M' *die dem Punkte* P' *als einem Punkte der Tangente* PP' *zukommenden zusammengesetzten Wurzelfunctionen zu verstehen.*

Was die Anfangselemente dS der 4 gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 angeht, die durch den Punkt P hindurchlaufen, so kommt zweien derselben ein positives und zweien ein negatives Vorzeichen von Λ zu. Längs der Strecken PP' wechselt *das Vorzeichen von* Λ nicht, und es gehören von den 4 Strecken PP' stets zwei der negativen Hälfte der betreffenden Tangente an, so zwar, dass je eine positive und eine negative Strecke PP' im Punkte P einander conjugirt sind (vgl. § 6).

Ob die Vorzeichen von N' *und* N *mit einander oder die von* M' *und* M *mit einander* übereinstimmen oder nicht, das hängt nach § 6 davon ab, ob der Weg PP' die Ebene $\nu = \beta$, $\nu = \alpha$ oder $\mu = \gamma$ durchschneidet oder das Hyperboloid $\mu = \mu_0$ berührt, und ist also aus der geometrischen Anschauung unmittelbar ersichtlich.

Die gefundenen Relationen zwischen λ, μ, ν und μ', ν' können so aufgelöst werden:

$$\int_{\beta}^{\nu', N'} \frac{\nu^{\varkappa-1}\, d\nu}{\mathsf{N}} - \int_{\gamma}^{\mu', M'} \frac{\mu^{\varkappa-1}\, d\mu}{\mathsf{M}} - \int_{\beta}^{\nu, N} \frac{\nu^{\varkappa-1}\, d\nu}{\mathsf{N}} + \int_{\gamma}^{\mu, M} \frac{\mu^{\varkappa-1}\, d\mu}{\mathsf{M}} - \int_{\lambda_0}^{\lambda, \Lambda} \frac{\lambda^{\varkappa-1}\, d\lambda}{\Lambda} = 0,$$

worauf man das Resultat erhält:

III. *Zwischen den elliptischen Coordinaten ν', μ' des Berührungspunktes P' einer der 4 vom Punkte P an die beiden Flächen λ_0 und μ_0 laufenden gemeinsamen Tangenten mit der Fläche λ_0 einerseits und den elliptischen Coordinaten λ, μ, ν des Punktes P andererseits bestehen die Relationen:*

$$(55)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\beta}^{\nu, N} \frac{d\nu}{\mathsf{N}} - \int_{\gamma}^{\mu, M} \frac{d\mu}{\mathsf{M}} + \int_{\lambda_0}^{\lambda, \Lambda} \frac{d\lambda}{\Lambda} = \int_{\beta}^{\nu', N'} \frac{d\nu}{\mathsf{N}} - \int_{\gamma}^{\mu', M'} \frac{d\mu}{\mathsf{M}}, \\ \displaystyle\int_{\beta}^{\nu, N} \frac{\nu\, d\nu}{\mathsf{N}} - \int_{\gamma}^{\mu, M} \frac{\mu\, d\mu}{\mathsf{M}} + \int_{\lambda_0}^{\lambda, \Lambda} \frac{\lambda\, d\lambda}{\Lambda} = \int_{\beta}^{\nu', N'} \frac{\nu\, d\nu}{\mathsf{N}} - \int_{\gamma}^{\mu', M'} \frac{\mu\, d\mu}{\mathsf{M}}, \end{cases}$$

wo N, M, Λ *die dem Punkte P und* N', M' *die dem Punkte P' als Punkten der betrachteten Tangente zugehörigen zusammengesetzten Wurzelfunctionen bedeuten.*

Dieser Satz enthält die geometrische Deutung des *einfachen Additionsproblems*, welches verlangt, bei gegebenen oberen Grenzen ν, μ, λ und gegebenen Vorzeichen von N, M, Λ die oberen Grenzen ν', μ' und die Vorzeichen von N', M' so zu bestimmen, dass von Multiplis der Perioden abgesehen die beiden Relationen (55) bestehen.

Die *constructive Lösung des Problems* ist folgende:

Man fixirt auf dem Ellipsoid λ einen der Punkte ν, μ, für welche die zugehörige Quadratwurzel N das gegebene Vorzeichen besitzt, und wählt unter den 4 durch diesen Punkt P gehenden gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 diejenige aus, der im Punkte P die gegebenen Vorzeichen von M und Λ zukommen. Die elliptischen Coordinaten ν' und μ' des Berührungspunktes dieser Tangente mit dem Ellipsoid λ_0 sind die gesuchten oberen Grenzen und die dem Punkte als einem Punkte der Tangente zukommenden zusammengesetzten Wurzelfunctionen N' und M' sind die gesuchten Wurzelwerthe N' und M'.

Indem man die Relationen (55) durch lineare Combination auf die in (28) eingeführten Normalintegrale überträgt, nehmen sie die Gestalt an:

$$(56)\quad \left\{\int_{\beta}^{\nu',N'} d\omega_\varkappa - \int_{\gamma}^{\mu',M'} d\omega_\varkappa\right\} - \left\{\int_{\beta}^{\nu,N} d\omega_\varkappa - \int_{\gamma}^{\mu,M} d\omega_\varkappa\right\} = \int_{\lambda_0}^{\lambda,\Lambda} d\omega_\varkappa, \quad \varkappa = 1, 2.$$

Die nähere Betrachtung der Integrationswege der vorliegenden Integrale führt alsdann zu dem Schlusse, dass die linken Seiten dieser Gleichungen nicht nur modulo $\pi i \mid 0$ und $0 \mid \pi i$, sondern auch modulo $2\pi i \mid 0$ und $0 \mid 2\pi i$ als die Differenzen $u_1' - u_1 \mid u_2' - u_2$ eines Parameterpaares $u_1' \mid u_2'$ des Punktes P' und eines Parameterpaares $u_1 \mid u_2$ des Punktes P zu betrachten sind; und zwar ist $u_1 \mid u_2$ dasjenige Parameterpaar, welches der Punkt P mit der die Tangente PP' enthaltenden Ebene E_λ für die Darstellung (43) gemein hat (vgl. § 11, IV. V), und $u_1' \mid u_2'$ dasjenige Parameterpaar, welches der Punkt P' mit der Tangente PP' für die Darstellung (46) gemein hat (vgl. § 13, I. II). Hiernach ergiebt sich mit Rücksicht darauf, dass den Punkten der Strecke PP' der negative oder positive Werth von Λ zugehört, jenachdem dieselbe einen Theil der positiven oder negativen Hälfte der betreffenden Tangente der Flächen λ_0 und μ_0 ausmacht, der Satz:

IV. *Zwischen einem Parameterpaare $u_1' \mid u_1'$ des Berührungspunktes P' einer der 4 vom Punkte P an die beiden Flächen λ_0 und μ_0 laufenden gemeinsamen Tangenten einerseits und einem Parameterpaare $u_1 \mid u_2$ des Punktes P andererseits bestehen die Beziehungen:*

$$(54)\qquad u_1' \mid u_2' = u_1 \pm v_1 \mid u_2 \pm v_2;$$

dabei ist unter $u_1' \mid u_2'$ dasjenige Parameterpaar des Punktes P' verstanden, welches derselbe mit der Tangente PP' gemein hat, und unter $u_1 \mid u_2$ dasjenige Parameterpaar des Punktes P, welches er mit der die Tangente PP' enthaltenden Ebene E_λ gemein hat; endlich ist für $v_1 \mid v_2$ in der Definition (28) jetzt unter Λ der positive Werth der Quadratwurzel verstanden: es gelten dann in (54) die oberen oder unteren Zeichen, jenachdem die Strecke PP' der negativen oder positiven Hälfte der betreffenden Tangente angehört.

Damit ist der Satz II des vorigen Paragraphen in erweiterter Form wiedergefunden.

§ 16.

Die Additionstheoreme der ϑ-Functionen als analytischer Ausdruck der vereinigten Lage gewisser Raumelemente.

Auf Grund des Satzes IV kann man unmittelbar die Parameter der *vier Punkte* angeben, in welchen die vier durch den Punkt P gehenden Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 die Fläche λ_0 berühren.

Bezeichnet man nämlich die beiden Parameterpaare $u_1|u_2$ des Punktes P mit $u_1|u_2$ und $\bar{u}_1|\bar{u}_2$, so sind die Parameterpaare der vier Berührungspunkte P':

$$u_1 \pm v_1 \,|\, u_2 \pm v_2, \qquad \bar{u}_1 \pm v_1 \,|\, \bar{u}_2 \pm v_2.$$

Als weitere Folgerung geht hervor (vgl. § 13, I. II.):

V. *Sind $u_1|u_2$ und $\bar{u}_1|\bar{u}_2$ die beiden Parameterpaare eines äusseren Punktes P auf dem Ellipsoid $v_1|v_2$ oder λ, so sind:*

$$(57) \qquad \begin{cases} u_1 + v_1 \,|\, u_2 + v_2, & \bar{u}_1 + v_1 \,|\, \bar{u}_2 + v_2, \\ u_1 - v_1 \,|\, u_2 - v_2, & \bar{u}_1 - v_1 \,|\, \bar{u}_2 - v_2 \end{cases}$$

die Parameterpaare der 4 durch den Punkt P gehenden Strahlen S der Congruenz der gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 (für die Darstellung (46)).

Die je *über*einanderstehenden Parameterpaare in (57) kommen zweien in *derselben* Normalebene E_λ des Punktes P gelegenen, also einander conjugirten Strahlen S zu; die *neben*einanderstehenden Parameterpaare der oberen, resp. unteren Zeile in (57) gehören den Strahlen zu, die mit ihrer negativen, resp. positiven Hälfte durch den Punkt P gehen.

Zu einem äusseren Punkte P des Ellipsoides $v_1|v_2$ gehörten 2 Normalebenen E_λ und 4 Congruenzstrahlen S. Die analytischen Folgen der vereinigten Lage von Punkt x, y, z, t und Strahl p_{ix}, resp. von Ebene ξ, η, ζ, τ und Strahl p_{ix} sind:

$$\begin{aligned} &xp_{34} + yp_{42} + zp_{23} = 0, \quad && \xi p_{12} + \eta p_{13} + \zeta p_{14} = 0, \\ &yp_{14} - zp_{13} + tp_{34} = 0, \quad && \eta p_{23} - \zeta p_{42} + \tau p_{12} = 0, \\ &zp_{12} - xp_{14} + tp_{42} = 0, \quad && \zeta p_{34} - \xi p_{23} + \tau p_{13} = 0, \\ &xp_{13} - yp_{12} + tp_{23} = 0, \quad && \xi p_{42} - \eta p_{31} + \tau p_{14} = 0. \end{aligned}$$

In den transcendenten Parametern der betheiligten Elemente geschrieben, sind diese Relationen nichts anderes als die Additionstheoreme der ϑ-Functionen:

$$(58) \qquad \begin{cases} \vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(v_1|v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(u_1\ u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}(u_1\pm v_1\,|\,u_2\pm v_2) \\ -\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}(u_1\pm v_1\,|\,u_2\pm v_2) \\ +\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}(u_1\pm v_1\,|\,u_2\pm v_2)=0 \end{cases}$$

und 3 analoge Formeln,

ferner:

$$(58')\quad \begin{cases} \vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}(v_1|v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}(u_1|u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}(u_1\pm v_1|u_2\pm v_2) \\ -\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}(u_1\pm v_1|u_2\pm v_2) \\ +\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\pm v_1|u_2\pm v_2)=0 \end{cases}$$

und 3 analoge Formeln.

Diese Additionstheoreme gelten *in Bezug auf* $u_1|u_2$ *identisch*, *in Bezug auf* $v_1|v_2$ *nur unter der Voraussetzung* (32). Diese letztere ist es, welche die im Allgemeinen *vier*gliedrigen Additionsformeln auf 3 Glieder reducirt; es würden nämlich beispielsweise die beiden ausgeschriebenen Additionsformeln (58), (58′) in *unverkürzter* Form so lauten:

$$\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(v_1|v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(u_1|u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}(u_1\pm v_1|u_2\pm v_2)$$

$$-\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}(u_1\pm v_1|u_2\pm v_2)$$

$$+\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}(u_1\pm v_1|u_2\pm v_2)$$

$$-\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\pm v_1|u_2\pm v_2)=0$$

und

$$\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}(v_1|v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}(u_1|u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}(u_1\pm v_1|u_2\pm v_2)$$

$$-\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}(u_1\pm v_1|u_2\pm v_2)$$

$$+\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\pm v_1|u_2\pm v_2)$$

$$-\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)\,\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1\pm v_1|u_2\pm v_2)=0.$$

Mit $v_1|v_2=0|0$ gehen die 4 Additionsformeln (58) in die 4 Productrelationen (50) des § 13 über, während in den Formeln (58′) alle Glieder einzeln verschwinden.

§ 17.

Geometrische Bedeutung der Additionstheoreme der Integrale 2. und 3. Gattung.

Die vorstehenden §§ 14 – 16 bezogen sich auf das in den Gleichungen (55), (56) enthaltene Additionstheorem der hyperelliptischen Integrale 1. Gattung $p=2$. Der § 15 gab eine geometrische Inter-

pretation dieser Gleichungen, welche in § 14 mittels der Parameterdarstellungen des Kapitel II und in § 15 mittels der Differentialgleichungen (20) begründet wurde. Es ergaben sich ferner die den transcendenten Relationen (55) entsprechenden algebraischen Gleichungen (51), in welche mittels der Formeln (9) und (12) die oberen Grenzen $\lambda, \mu, \nu, \mu', \nu'$ der Integrale der Relationen (55) eingeführt werden können, und zugleich die geometrische Bedeutung einer Gruppe von Additionstheoremen der ϑ-Functionen. Auf Grund der dabei benutzten geometrischen Vorstellungen sollen im vorliegenden § 17 die von dem Additionstheorem (55) der *Integrale* 1. *Gattung* abhängigen Additionstheoreme der *Integrale* 2. *und* 3. *Gattung* abgeleitet werden.

Sei zu dem Ende wiederum $P = x, y, z = \lambda, \mu, \nu$ ein auf dem Ellipsoide λ beliebig gegebener äusserer Punkt und $P' = x', y', z' = \lambda_0, \mu', \nu'$ einer der 4 Berührungspunkte der vom Punkte P an λ_0 und μ_0 gezogenen Tangenten mit λ_0; seien ferner $\mathsf{N}, \mathsf{M}, \Lambda$ die dem Punkte P und N', M' die dem Punkte P' als Punkten der betrachteten Tangente zugehörigen Wurzelfunctionen.

Alsdann drückt sich die *Länge* einer solchen Tangente von P bis P' in gewöhnlicher Maassbestimmung nach § 7, 23 also aus:

$$PP' = \int_{\nu, N}^{\nu', N'} \frac{(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu_0)\, d\nu}{2\mathsf{N}} - \int_{\mu, M}^{\mu', M'} \frac{(\mu - \lambda_0)(\mu - \mu_0)\, d\mu}{2\mathsf{M}} + \int_{\lambda, \Lambda}^{\lambda_0} \frac{(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \mu_0)\, d\lambda}{2\Lambda},$$

und zwar ist dies die positive oder negative Länge des betreffenden Linienstückes, jenachdem die dem Punkte P als einem Punkte der Tangente zugehörige Wurzelfunction Λ positiv oder negativ ist. Andererseits hat man:

$$PP' = \pm \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

Die Combination beider Gleichungen giebt:

$$(59) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{\beta}^{\nu, N} \frac{(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu_0)\, d\nu}{2\mathsf{N}} - \int_{\gamma}^{\mu, M} \frac{(\mu - \lambda_0)(\mu - \mu_0)\, d\mu}{2\mathsf{M}} \\ &\qquad + \int_{\lambda_0}^{\lambda, \Lambda} \frac{(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \mu_0)\, d\lambda}{2\Lambda} \\ &= \int_{\beta}^{\nu', N'} \frac{(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu_0)\, d\nu}{2\mathsf{N}} - \int_{\gamma}^{\mu', M'} \frac{(\mu - \lambda_0)(\mu - \mu_0)\, d\mu}{2\mathsf{M}} \\ &\qquad \mp \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}, \end{aligned} \right.$$

wobei im 3. Gliede rechter Hand das obere oder untere Vorzeichen gilt, jenachdem im 3. Gliede linker Hand, für die obere Grenze, Λ positiv oder negativ ist.

Ebenso wie hiernach die Anwendung der gewöhnlichen Maassbestimmung auf die Tangente PP' zu dem *Additionstheorem der Integrale* 2. *Gattung* führt, gelangt man mit Anwendung der projectivischen Maassbestimmung für die Fundamentalfläche ω zu dem *Additionstheorem der Integrale* 3. *Gattung*. Die entsprechende Formel lautet (vgl. § 7, (23′)):

$$
(60)\quad
\begin{cases}
\sqrt{\dfrac{(\alpha-\omega)(\beta-\omega)(\gamma-\omega)}{(\lambda_0-\omega)(\mu_0-\omega)}}\left\{\displaystyle\int_{\beta}^{\nu,N}\frac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)\,d\nu}{(\nu-\omega)\,\mathsf{N}}\right. \\
\qquad\left.-\displaystyle\int_{\gamma}^{\mu,M}\frac{(\mu-\lambda_0)(\mu-\mu_0)\,d\mu}{(\mu-\omega)\,\mathsf{M}}+\int_{\lambda_0}^{\lambda,\Lambda}\frac{(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\mu_0)\,d\lambda}{(\lambda-\omega)\,\Lambda}\right\} \\
=\sqrt{\dfrac{(\alpha-\omega)(\beta-\omega)(\gamma-\omega)}{(\lambda_0-\omega)(\mu_0-\omega)}}\left\{\displaystyle\int_{\beta}^{\nu',N'}\frac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)\,d\nu}{(\nu-\omega)\,\mathsf{N}}\right. \\
\qquad\left.-\displaystyle\int_{\gamma}^{\mu',M'}\frac{(\mu-\lambda_0)(\mu-\mu_0)\,d\mu}{(\mu-\omega)\,\mathsf{M}}\right\}\mp\log\frac{\Omega_1+\Omega_2}{\Omega_1-\Omega_2},
\end{cases}
$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\Omega_1=\frac{xx'}{\alpha-\omega}+\frac{yy'}{\beta-\omega}+\frac{zz'}{\gamma-\omega}-1,$$

$$\Omega_2=\sqrt{\frac{(x-x')^2}{\alpha-\omega}+\cdots+\frac{(z-z')^2}{\gamma-\omega}-\frac{(yz'-zy')^2}{(\beta-\omega)(\gamma-\omega)}-\cdots-\frac{(xy'-yx')^2}{(\alpha-\omega)(\beta-\omega)}},$$

und das Vorzeichen des logarithmischen Gliedes dem von Λ entgegengesetzt zu nehmen ist.

In die erhaltenen Formeln (59) und (60) kann man an Stelle der x, y, z und x', y', z' vermittelst der Formeln (9) die λ, μ, ν und μ', ν' einführen oder auch vermittelst der Formeln (33) und (34) die von den Integralen der Gleichungen (56) abhängenden ϑ-Functionen eintreten lassen. Das letztere soll wenigstens für die Formel (59) explicite durchgeführt werden.

Sind wieder $u_1 \mid u_2$ die Parameter des Punktes P auf dem Ellipsoide $v_1 \mid v_2(\lambda)$ und der die Tangente PP' enthaltenden Ebene E_λ, ferner $u_1' \mid u_2'$ die Parameter des Punktes P' und der Tangente PP' selbst, so wird nach (33) und (34):

$$\frac{x-x'}{\sqrt{\alpha-\lambda_0}} = \frac{\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1'\mid u_2')}{\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1'\mid u_2')}$$
$$- \frac{\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(u_1'\mid u_2')}{\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1'\mid u_2')}.$$

Nun ist nach (54) $u_1' \mid u_2' = u_1 \pm v_1 \mid u_2 \pm v_2$, wo die oberen oder unteren Vorzeichen gelten, jenachdem PP' der negativen oder positiven Hälfte der betreffenden Tangente angehört. Benutzt man daher, indem man zunächst die oberen Vorzeichen annimmt, das Additionstheorem:

$$\begin{aligned}
&\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1+v_1\mid u_2+v_2)\\
-&\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(u_1+v_1\mid u_2+v_2)\\
-&\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}\vartheta\binom{0\,1}{1\,1}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\binom{0\,1}{1\,1}(u_1+v_1\mid u_2+v_2)\\
-&\vartheta\binom{1\,0}{0\,1}\vartheta\binom{1\,1}{0\,1}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\binom{1\,0}{0\,1}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\binom{1\,1}{0\,1}(u_1+v_1\mid u_2+v_2)=0,
\end{aligned}$$

in welchem das letzte Glied in Folge von (32) verschwindet, so erhält man:

$$\frac{x-x'}{\sqrt{\alpha-\lambda_0}} = + \frac{\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}\vartheta\binom{0\,1}{1\,1}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\binom{0\,1}{1\,1}(u_1'\mid u_2')}{\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1'\mid u_2')};$$

hieran reihen sich die analogen Formeln:

$$(61)\quad
\begin{aligned}
\frac{y-y'}{\sqrt{\beta-\lambda_0}} &= - \frac{\vartheta\binom{0\,0}{1\,0}\vartheta\binom{0\,1}{1\,1}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\binom{0\,1}{1\,0}(u_1'\mid u_2')}{\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1'\mid u_2')},\\
\frac{z-z'}{\sqrt{\gamma-\lambda_0}} &= - \frac{\vartheta\binom{1\,1}{0\,0}\vartheta\binom{0\,1}{1\,1}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\binom{1\,0}{0\,0}(u_1'\mid u_2')}{\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1'\mid u_2')},\\
\frac{yz'-zy'}{\sqrt{\beta-\lambda_0}\sqrt{\gamma-\lambda_0}} &= + \frac{\vartheta\binom{1\,0}{0\,1}\vartheta\binom{0\,1}{1\,1}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\binom{1\,1}{0\,1}(u_1'\mid u_2')}{\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1'\mid u_2')},\\
\frac{zx'-xz'}{\sqrt{\gamma-\lambda_0}\sqrt{\alpha-\lambda_0}} &= - \frac{\vartheta\binom{1\,0}{0\,0}\vartheta\binom{0\,1}{1\,1}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\binom{1\,1}{0\,0}(u_1'\mid u_2')}{\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1'\mid u_2')},\\
\frac{xy'-yx'}{\sqrt{\alpha-\lambda_0}\sqrt{\beta-\lambda_0}} &= + \frac{\vartheta\binom{0\,1}{1\,0}\vartheta\binom{0\,1}{1\,1}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{1\,0}(u_1'\mid u_2')}{\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(v_1\mid v_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1\mid u_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1'\mid u_2')}.
\end{aligned}$$

Diese Formeln sind vollständig aufgestellt worden, weil sie *einen neuen Beweis der Darstellung* (46) *der Liniencongruenz der gemeinsamen Tangenten der Flächen* λ_0 *und* μ_0 *liefern*, der sich unmittelbar auf die Additionstheoreme der ϑ-Functionen und die geometrische Bedeutung der Addition der transcendenten Parameter stützt (vgl. § 4, (16); § 12, (46)).

Zuzüglich der Formeln:

$$\frac{\sqrt{\beta-\lambda_0}}{\sqrt{\alpha-\lambda_0}} = \frac{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}}, \qquad \frac{\sqrt{\gamma-\lambda_0}}{\sqrt{\alpha-\lambda_0}} = \frac{\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}}{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}},$$

ergeben die 3 ersten Gleichungen (61):

$$\frac{x-x'}{\sqrt{\alpha-\lambda_0}} = + \frac{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}(u_1'|u_2')}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(v_1|v_2)\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1'|u_2')},$$

$$\frac{y-y'}{\sqrt{\alpha-\lambda_0}} = - \frac{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}(u_1'|u_2')}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(v_1|v_2)\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1'|u_2')},$$

$$\frac{z-z'}{\sqrt{\alpha-\lambda_0}} = - \frac{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}(u_1|v_1)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1'|u_2')}{\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(v_1|v_2)\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1|u_2)\cdot\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1'|u_2')}.$$

Die Bildung der Quadratsummen der rechten und linken Seiten führt unter Benutzung der identischen Relation*):

$$\vartheta^2\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\vartheta^2\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}(u_1'\,u_2') + \vartheta^2\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\vartheta^2\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}(u_1'|u_2')$$
$$+ \vartheta^2\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\vartheta^2\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1'\,u_2') - \vartheta^2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\vartheta^2\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}(u_1'|u_2') = 0$$

zu dem Resultate**):

$$\sqrt{\frac{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}{\alpha-\lambda_0}}$$
$$= \pm \frac{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}(v_1|v_2)\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}(u_1|u_2)\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}(u_1'|u_2')}{\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}(v_1|v_2)\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1|u_2)\vartheta\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}(u_1'|u_2')}.$$

Hiernach nimmt die Gleichung (59) die Form an:

---

*) Vgl. Krazer, a. a. O. S. 35, B_4.

**) Vgl. die analoge Formel aus der Anwendung der elliptischen Functionen auf die Geometrie der Kegelschnitte bei Enneper, a. a. O. S. 500.

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{\beta}^{\nu,N}\frac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)\,d\nu}{2\sqrt{\alpha-\lambda_0}\cdot N}-\int_{\gamma}^{\mu,M}\frac{(\mu-\lambda_0)(\mu-\mu_0)\,d\mu}{2\sqrt{\alpha-\lambda_0}\cdot M}+\int_{\lambda_0}^{\lambda,\Lambda}\frac{(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\mu_0)\,d\lambda}{2\sqrt{\alpha-\lambda_0}\cdot\Lambda}\\ &\qquad=\int_{\beta}^{\nu',N'}\frac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)\,d\nu}{2\sqrt{\alpha-\lambda_0}\cdot N}-\int_{\gamma}^{\mu',M'}\frac{(\mu-\lambda_0)(\mu-\mu_0)\,d\mu}{2\sqrt{\alpha-\lambda_0}\cdot M}\\ &\qquad\mp\frac{\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}\vartheta\binom{0\,1}{1\,1}(v_1\,|\,v_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(u_1\,|\,u_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(u_1+v_1\,|\,u_2+v_2)}{\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(v_1\,|\,v_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1\,|\,u_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1+v_1\,|\,u_2+v_2)}\,, \end{aligned}\right.$$

wo das Vorzeichen des 3. Gliedes rechter Hand so zu bestimmen bleibt, dass dieses Glied mit Einschluss seines Vorzeichens einen negativen oder positiven Werth erhält, jenachdem im 3. Gliede linker Hand, für die obere Grenze, Λ positiv oder negativ ist.

Trennt man die Integraldifferenzen $u_1 \mid u_2$ in ihre Bestandtheile und setzt etwa:

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{\beta}^{\nu,N}d\omega_1\,\Big|\int_{\beta}^{\nu,N}d\omega_2=s_1\mid s_2,\qquad \int_{\gamma}^{\mu,M}d\omega_1\,\Big|\int_{\gamma}^{\mu,M}d\omega_2=t_1\mid t_2\\ &\qquad\qquad\text{und, wie früher:}\\ &\qquad\int_{\lambda_0}^{\lambda,\Lambda}d\omega_1\,\Big|\int_{\lambda_0}^{\lambda,\Lambda}d\omega_2=v_1\mid v_2, \end{aligned}\right.$$

so bestehen zwischen den Variablen $s_1 \mid s_2$, $t_1 \mid t_2$, $v_1 \mid v_2$ nach (31) die Relationen:

$$\vartheta\binom{1\,0}{1\,1}(s_1\mid s_2)=0,\qquad \vartheta\binom{0\,1}{0\,1}(t_1\mid t_2)=0,\qquad \vartheta\binom{1\,1}{0\,1}(v_1\mid v_2)=0.$$

In Folge derselben fallen aus der für beliebige Werthepaare $s_1 \mid s_2$ und $t_1 \mid t_2$ geltenden Additionsformel:

$$\begin{aligned} &\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(s_1\mid s_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(t_1\mid t_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(s_1-t_1\mid s_2-t_2)\\ -&\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(s_1\mid s_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(t_1\mid t_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(s_1-t_1\mid s_2-t_2)\\ -&\vartheta\binom{1\,0}{0\,0}\vartheta\binom{1\,0}{1\,1}(s_1\mid s_2)\,\vartheta\binom{1\,0}{1\,1}(t_1\mid t_2)\,\vartheta\binom{1\,0}{0\,0}(s_1-t_1\mid s_2-t_2)\\ -&\vartheta\binom{0\,1}{1\,0}\vartheta\binom{0\,1}{0\,1}(s_1\mid s_2)\,\vartheta\binom{0\,1}{0\,1}(t_1\mid t_2)\,\vartheta\binom{0\,1}{1\,0}(s_1-t_1\mid s_2-t_2)=0 \end{aligned}$$

im vorliegenden Falle die beiden letzten Glieder fort, und es folgt:

$$\frac{\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(u_1\mid u_2)}{\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(u_1\mid u_2)}=\frac{\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(s_1\mid s_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(t_1\mid t_2)}{\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(s_1\mid s_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(t_1\mid t_2)}$$

Demnach kann man das *Additionstheorem* (62) *der Integrale 2. Gattung* auch in der Form schreiben:

$$(64)\quad \begin{cases} \int_{\beta}^{\nu,N} \frac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)\,d\nu}{2\sqrt{\alpha-\lambda_0}\cdot \mathsf{N}} - \int_{\gamma}^{\mu,M} \frac{(\mu-\lambda_0)(\mu-\mu_0)\,d\mu}{2\sqrt{\alpha-\lambda_0}\cdot \mathsf{M}} + \int_{\lambda_0}^{\lambda,\Lambda} \frac{(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\mu_0)\,d\lambda}{2\sqrt{\alpha-\lambda_0}\cdot \Lambda} \\ \qquad = \int_{\beta}^{\nu',N'} \frac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)\,d\nu}{2\sqrt{\alpha-\lambda_0}\cdot \mathsf{N}} - \int_{\gamma}^{\mu',M'} \frac{(\mu-\lambda_0)(\mu-\mu_0)\,d\mu}{2\sqrt{\alpha-\lambda_0}\cdot \mathsf{M}} \\ \mp \frac{\vartheta\binom{0\,1}{1\,1}(v_1|v_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(s_1|s_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(t_1|t_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}(s_1-t_1+v_1\,|\,s_2-t_2+v_2)}{\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(v_1|v_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(s_1|s_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(t_1|t_2)\,\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(s_1-t_1+v_1\,|\,s_2-t_2+v_2)}, \end{cases}$$

wo $s_1 \mid s_2$, $t_1 \mid t_2$, $v_1 \mid v_2$ die Bedeutungen (63) haben, und zwischen ν, N; μ, M; λ, Λ; ν', N'; μ', M' die Relationen (55) bestehen.

§ 18.

Bestimmung des Schnittpunktes zweier sich schneidender Congruenzstrahlen.

An den Satz V des § 16 schliessen sich als leichte Folgerungen die ferneren Sätze an:

I. *Sind $u_1 \mid u_2$ die Parameter eines Strahles S der Congruenz* (46), *so wird das Ellipsoid $v_1 \mid v_2$ oder λ von dem positiven Halbstrahl S im Punkte:*

$$u_1 + v_1 \mid u_2 + v_2,$$

von dem negativen Halbstrahl im Punkte:

$$u_1 - v_1 \mid u_2 - v_2$$

geschnitten.

Hierbei sind unter $v_1 \mid v_2$ die Integrale aus (28) mit positivem Λ zu verstehen, wie solches auch für die beiden folgenden Sätze gilt:

II. *Die den Strahl $u_1 \mid u_2$ in seinen Schnittpunkten mit dem Ellipsoid $v_1 \mid v_2$ enthaltenden Normalebenen dieser Punkte sind $u_1 \pm v_1 \mid u_2 \pm v_2$ mit der dem Satz* I *entsprechenden Bedeutung der Vorzeichen.*

III. *Ein vom Punkte $u_1 \mid u_2$ des Ellipsoides $v_1 \mid v_2$ ausgehender und in der Normalebene $u_1 \mid u_2$ des Punktes enthaltener Strahl S schneidet dasselbe Ellipsoid zum 2. Mal im Punkte:*

$$u_1 \pm 2v_1 \mid u_2 \pm 2v_2,$$

wo die positiven oder negativen Vorzeichen zu nehmen sind, jenachdem der 2. Schnittpunkt auf dem positiven oder negativen Halbstrahl S liegt.

An diese Sätze knüpft sich weiter die Frage, wann zwei reelle Congruenzstrahlen, die durch ihre, wie in § 10 beschränkten, Para-

meterpaare $u_1' \mid u_2'$ und $u_1'' \mid u_2''$ gegeben werden, sich schneiden, und zwar sich so schneiden, dass sie in ihrem Schnittpunkte conjugirt sind, also die durch sie bestimmte Ebene eine der beiden ihrem Schnittpunkte zugehörigen Normalebenen des Ellipsoides ist, auf dem der Schnittpunkt liegt. Diese besondere Form des Schneidens zweier Strahlen soll als „*conjugirter Schnitt auf dem Ellipsoid*" bezeichnet werden.

Seien unter der Voraussetzung, dass die gegebenen Strahlen sich auf dem Ellipsoid $v_1 \mid v_2$ conjugirt schneiden, $u_1 \mid u_2$ die Parameter ihres Schnittpunktes und zugleich der diesem Punkte zugehörigen Normalebene E_λ, welche die Strahlen enthält. Der Schnittpunkt mag etwa auf dem negativen Halbstrahl $u_1' \mid u_2'$ und auf dem positiven Halbstrahl $u_1'' \mid u_2''$ liegen. Dann müssen sich nach § 16, V die Parameter $u_1' \mid u_2'$ und $u_1'' \mid u_2''$ in die Form setzen lassen:

$$u_1' \mid u_2' = u_1 + v_1 \mid u_2 + v_2, \qquad u_1'' \mid u_2'' = u_1 - v_1 \mid u_2 - v_2$$

oder, wie der Kürze halber geschrieben werde:

$$u' = u + v, \qquad u'' = u - v.$$

Diese Form angenommen, folgt:

$$u = \frac{u' + u''}{2} \qquad v = \frac{u' - u''}{2}.$$

Da nun $v_1 \mid v_2$ allgemein der Bedingung (32) genügen müssen, so ergiebt sich als *nothwendige* Bedingung für den conjugirten Schnitt der Strahlen u' und u'':

$$\vartheta \begin{pmatrix} 1\,1 \\ 0\,1 \end{pmatrix} \left(\frac{u_1' - u_1''}{2} \;\middle|\; \frac{u_2' - u_2''}{2} \right) = 0.$$

Diese Bedingung ist aber auch *hinreichend*. Ist sie nämlich erfüllt, so wird die gemeinsame obere Grenze λ, Λ der beiden einfachen Integrale $v_1 \mid v_2$ aus der Forderung:

$$(65) \qquad v_1 \mid v_2 = \int_{\lambda_0}^{\lambda, \Lambda} d\omega_1 \;\middle|\; \int_{\lambda_0}^{\lambda, \Lambda} d\omega_2 = \frac{u_1' - u_1''}{2} \;\middle|\; \frac{u_2' - u_2''}{2}$$

bestimmt, und zwar eindeutig. Da überdies aus dem Umkehrproblem (65) unter anderen die Relation:

$$\frac{\sqrt{\lambda_0 - \lambda}}{\sqrt{\gamma - \lambda_0}} = \frac{\vartheta \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 0\,0 \end{pmatrix} \vartheta \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 0\,1 \end{pmatrix} \vartheta \begin{pmatrix} 1\,1 \\ 0\,0 \end{pmatrix} \vartheta \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 0\,1 \end{pmatrix} \left(\frac{u_1' - u_1''}{2} \;\middle|\; \frac{u_2' - u_2''}{2} \right)}{\vartheta \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 1\,0 \end{pmatrix} \vartheta \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 1\,1 \end{pmatrix} \vartheta \begin{pmatrix} 1\,1 \\ 1\,1 \end{pmatrix} \vartheta \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix} \left(\frac{u_1' - u_1''}{2} \;\middle|\; \frac{u_2' - u_2''}{2} \right)}$$

folgt, deren rechte Seite, bei der den Parametern $u_1 \mid u_2$ der reellen Strahlen auferlegten Beschränkung, immer reell ist, so muss die Lösung

λ des Umkehrproblems (65) immer zwischen den reellen Grenzen $-\infty$ und λ_0 liegen.

Es kann alsdann auch stets erreicht werden, dass in der Lösung λ, Λ die Wurzel Λ positiv ausfällt, indem man, falls dies bei der Forderung: $v = \frac{u' - u''}{2}$ nicht der Fall ist, die Forderung $v = \frac{u'' - u'}{2}$ stellt. Hat man die obere Grenze λ, Λ der beiden Integrale $v_1 \mid v_2$ bestimmt, und ist für $v = \frac{u' - u''}{2}$ das Λ positiv ausgefallen, so wird nach § 18, 1 das Ellipsoid λ von dem negativen Halbstrahl u' im Punkte $u' - v = \frac{u' + u''}{2}$ und von dem positiven Halbstrahl u'' im Punkte $u'' + v = \frac{u' + u''}{2}$ geschnitten. Die beiden Schnittpunkte fallen also zusammen; ferner liegen nach § 18, II die beiden Strahlen u' und u'' auch in derselben Normalebene des Ellipsoides λ im Punkte $\frac{u' + u''}{2}$. Da $u_1' \mid u_2'$ ein reeller Strahl der Congruenz und $v_1 \mid v_2$, wie bewiesen, ein reelles, λ_0 umschliessendes Ellipsoid ist, so folgt, dass auch der Schnittpunkt $u' - v = \frac{u' + u''}{2}$ ein reeller, äusserer Punkt sein wird.

Das Resultat ist dieses:

IV. a) *Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, das zwei reelle Congruenzstrahlen $u_1' \mid u_2'$ und $u_1'' \mid u_2''$ sich auf einem Ellipsoid λ conjugirt schneiden, lautet:*

$$\vartheta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\frac{u_1' - u_1'}{2} \;\middle|\; \frac{u_2' - u_2'}{2} \right) = 0; \tag{66}$$

b) *Der Schnittpunkt liegt dann auf dem Ellipsoid:*

$$v_1 \mid v_2 = \pm \frac{u_1' - u_1''}{2} \;\middle|\; \pm \frac{u_2' - u_2''}{2};$$

c) *Die gemeinsamen Parameter des Schnittpunktes und der Ebene der beiden Strahlen sind:*

$$u_1 \mid u_2 = \frac{u_1' + u_1''}{2} \;\middle|\; \frac{u_2' + u_2''}{2}; \tag{67}$$

d) *Jenachdem sich in der Lösung des Umkehrproblems:*

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda, \Lambda} d\omega_1 \;\middle|\; \int_{\lambda_0}^{\lambda, \Lambda} d\omega_2 = \frac{u_1' - u_1''}{2} \;\middle|\; \frac{u_2' - u_2''}{2} \tag{65}$$

für Λ das positive oder negative Vorzeichen ergiebt, liegt der Schnittpunkt der beiden Strahlen auf der negativen Hälfte von $u_1' \mid u_2'$ und der positiven von $u_1'' \mid u_2''$, oder umgekehrt.

Da die nicht symmetrische Verwendung der 3 elliptischen Coordinaten λ, μ, ν zur Definition (28) der Parameter u und v den *Ellipsoiden* des confocalen Systems eine ausgezeichnete Rolle zuweist, so kann der Gleichberechtigung der *drei Flächenarten* des confocalen Systems nicht in jeder Beziehung Rechnung getragen werden, ohne dass man die einmal gewählten Parameter verlässt. Um jedoch wenigstens die *einschaligen Hyperboloide* für spätere Zwecke der Betrachtung zugänglich zu machen, soll hier noch die Frage beantwortet werden, wann zwei Congruenzstrahlen u' und u'' „*sich auf einem Hyperboloid* μ *conjugirt schneiden*", d. h. sich so schneiden, dass ihr Winkel von der Normale N_μ des einschaligen Hyperboloides, welches durch ihren Schnittpunkt geht, halbirt wird.

Sei $P = \lambda, \mu, \nu$ der Schnittpunkt der beiden Strahlen u' und u'', die in der bezeichneten Art sich schneidend angenommen werden. Bedeuten nun ε_1 und ε_2 nach Bedürfniss das Zeichen $+$ oder $-$, so sind die beiden Parameterpaare u und $\bar{u}$ (vgl. § 16) des Punktes im Allgemeinen von der Form:

$$u = u^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}, \qquad \bar{u} = u^{\varepsilon_1, -\varepsilon_2} + (\pi i \mid 0),$$

wofern man von dem etwa zutretenden Periodenpaar $0 \mid \pi i$ absieht (vgl. Fig. 3). Dabei steht $u + (\pi i \mid 0)$ zur Abkürzung für $u_1 + \pi i \mid u_2 + 0$.

Die 4 Congruenzstrahlen durch den Punkt haben nach § 16, IV die Parameterpaare:

$$\begin{aligned} &u^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} + v, \qquad && u^{\varepsilon_1, -\varepsilon_2} + v + (\pi i \mid 0), \\ &u^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} - v, \qquad && u^{\varepsilon_1, -\varepsilon_2} - v + (\pi i \mid 0), \end{aligned}$$

und zwar gehören die je nebeneinanderstehenden Parameterpaare zu einem Paar in Bezug auf N_μ conjugirter Strahlen; denn die dem Punkte P als einem Punkte eines jeden der 4 Strahlen zugehörigen zusammengesetzten Wurzelfunctionen sind bezüglich:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 \mathsf{N},\ \varepsilon_2 \mathsf{M},\ +\Lambda, \qquad && \varepsilon_1 \mathsf{N},\ -\varepsilon_2 \mathsf{M},\ +\Lambda, \\ &\varepsilon_1 \mathsf{N},\ \varepsilon_2 \mathsf{M},\ -\Lambda, \qquad && \varepsilon_1 \mathsf{N},\ -\varepsilon_2 \mathsf{M},\ -\Lambda \end{aligned}$$

(vgl. § 10, VI. § 11, V. § 15, IV). Zwei in Bezug auf N_μ im Punkte P conjugirte Strahlen u' und u'' haben also nothwendig die Parameterdifferenz:

$$u' - u'' = u^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} - u^{\varepsilon_1, -\varepsilon_2} - (\pi i \mid 0),$$

und zwar gehört bei dieser Schreibweise dem Punkte P als einem Punkte auf u', resp. u'' die zusammengesetzte Wurzelfunction $\varepsilon_2 \mathsf{M}$, resp. $-\varepsilon_2 \mathsf{M}$ zu. Mit Rücksicht auf die Definition (28) der Parameter u und auf die Beziehung:

$$2\int_\gamma^{\mu_0} d\omega_1 \mid 2\int_\gamma^{\mu_0} d\omega_2 = \pi i \mid 0,$$

wird hieraus:

$$u' - u'' = 2\int_{\mu_0}^{\mu, -\varepsilon_2 M} d\omega_1 \;\Big|\; 2\int_{\mu_0}^{\mu, -\varepsilon_2 M} d\omega_2 .$$

Setzt man also abkürzend:

$$w = w_1 \mid w_2 = -\int_{\mu_0}^{\mu, M} d\omega_1 \;\Big|\; -\int_{\mu_0}^{\mu, M} d\omega_2 , \tag{68}$$

so hat man den Satz:

Wenn sich die beiden Congruenzstrahlen u' und u'' im Punkte $P = \lambda, \mu, \nu$ „auf dem Hyperboloid μ conjugirt schneiden", so stehen ihre Parameter in der Beziehung:

$$\frac{u' - u''}{2} = \pm w, \tag{65'}$$

wo w die Bedeutung (68) hat, und das obere oder untere Vorzeichen gilt, jenachdem die dem Punkte P als einem Punkte des Strahles u' zugehörige Wurzelfunction M das positive oder negative Vorzeichen besitzt.

Um der Vorzeichenregel einen anschaulicheren Ausdruck zu geben, wird man neben die in § 5 eingeführte Theilung jedes Congruenzstrahles in *„zwei Hälften"*, eine positive und eine negative, eine zweite, von jener unabhängige Theilung jedes Congruenzstrahles in *„zwei Abschnitte"* treten lassen. *Der positive Abschnitt erstrecke sich*, mit Bezugnahme auf die positive *Richtung* des Strahles, *vom Berührungspunkt des Strahles mit dem Hyperboloid μ_0 bis zum Schnittpunkt mit der Ebene $\mu = \gamma$, der negative Abschnitt von diesem bis zu jenem Punkte zurück.* Auf dem positiven Abschnitt ist dann nach § 6 M negativ, auf dem negativen M positiv.

Hiernach gilt in (65') das obere oder untere Zeichen, jenachdem der Punkt P auf dem negativen oder positiven Abschnitte des Strahles u' liegt.

Man kann nun ohne Schwierigkeit zeigen, dass die aus (65') nothwendig folgende Relation (vgl. Formeln (31)):

$$\vartheta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\left(\frac{u_1' - u_1''}{2} \;\Big|\; \frac{u_2' - u_2''}{2}\right) = 0$$

umgekehrt auch die *hinreichende* Bedingung für den verlangten Schnitt der Strahlen u' und u'' ist. Damit erhält man das Resultat:

V. a) *Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die 2 reellen Congruenzstrahlen $u_1' \mid u_2'$ und $u_1'' \mid u_2''$ sich auf einem Hyperboloid μ conjugirt schneiden, lautet:*

$$(66') \qquad \vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\1\,1\end{pmatrix}\left(\frac{u_1' - u_1''}{2} \;\middle|\; \frac{u_2' - u_2''}{2}\right) = 0.$$

b) *Der Schnittpunkt liegt alsdann auf dem einschaligen Hyperboloid, dessen Parameter μ sich aus dem Umkehrproblem bestimmt:*

$$(65') \qquad w_1 \mid w_2 = -\int_{\mu_0}^{\mu, M} d\omega_1 \;\Big|\; -\int_{\mu_0}^{\mu, M} d\omega_2 = \frac{u_1' - u_1''}{2} \;\Big|\; \frac{u_2' - u_2''}{2}.$$

c) *Jenachdem die Lösung des letzteren für* M *das positive oder negative Vorzeichen ergiebt, liegt der Schnittpunkt der beiden Strahlen auf dem negativen Abschnitt von u' und dem positiven von u'', oder umgekehrt.*

Die Gültigkeit der Sätze dieses Paragraphen ist wesentlich gebunden an die *Beschränkung* auf die *reellen* Congruenzstrahlen und auf die von den *beschränkten* Variablen λ, μ, ν (vgl. § 1, 6) abhängigen Parameterpaare $u_1 \mid u_2$ und $v_1 \mid v_2$. Bei völlig *unbegrenzter* Variabilität der λ, μ, ν im *complexen* Gebiete hört nicht nur die eindeutige Beziehung zwischen Strahl und Parameterpaar $u_1 \mid u_2$ auf, sondern geht auch die Unterscheidung der Ellipsoide und Hyperboloide des confocalen Systems durch die Bezeichnung ihrer Parameter λ, μ, ν verloren.*)

Um *bei dieser allgemeinsten Auffassung* die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür zu finden, dass zwei Congruenzstrahlen u' und u'' sich schneiden, gehe man von der algebraischen Form dieser Bedingung aus. Diese lautet, wenn p_{ik}' und p_{ik}'' die Liniencoordinaten der beiden Strahlen sind:

$$p_{12}'p_{34}'' + p_{13}'p_{42}'' + p_{14}'p_{23}'' + p_{12}''p_{34}' + p_{13}''p_{42}' + p_{14}''p_{23}' = 0.$$

Führt man in diese Gleichung mittels der Formeln (46) die transcendenten Parameter u' und u'' der beiden Strahlen ein und benutzt die identische Relation (wo allgemein $u = u_1 \mid u_2$ zu denken ist):

$$\begin{aligned}
&\vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\1\,1\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\1\,1\end{pmatrix}(u')\,\vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\0\,1\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\0\,1\end{pmatrix}(u'')\\
&+\vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\1\,0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\1\,0\end{pmatrix}(u')\,\vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\0\,0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\0\,0\end{pmatrix}(u'')\\
&-\vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\0\,0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\0\,0\end{pmatrix}(u')\,\vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\1\,0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\1\,0\end{pmatrix}(u'')
\end{aligned}$$

*) Vgl. die Dissertation des Verfassers (Leipziger Dissertationen 1881), S. 22.

$$+\vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\1\,1\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\1\,1\end{pmatrix}(u'')\,\vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\0\,1\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\0\,1\end{pmatrix}(u')$$

$$+\vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\1\,0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\1\,0\end{pmatrix}(u'')\,\vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\0\,0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\0\,0\end{pmatrix}(u')$$

$$-\vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\0\,0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\0\,0\end{pmatrix}(u'')\,\vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\1\,0\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\1\,0\end{pmatrix}(u')$$

$$=-4\,\vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\0\,1\end{pmatrix}\left(\frac{u'-u''}{2}\right)\vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\1\,1\end{pmatrix}\left(\frac{u'-u''}{2}\right)\vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\1\,1\end{pmatrix}\left(\frac{u'+u''}{2}\right)\vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\0\,1\end{pmatrix}\left(\frac{u'+u''}{2}\right),$$

welche ein Specialfall der Riemann'schen ϑ-Formel*) ist, so nimmt die obige Bedingung die Form an:

$$\vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\0\,1\end{pmatrix}\left(\frac{u'-u''}{2}\right)\vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\1\,1\end{pmatrix}\left(\frac{u'-u''}{2}\right)\vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\1\,1\end{pmatrix}\left(\frac{u'+u''}{2}\right)\vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\0\,1\end{pmatrix}\left(\frac{u'+u''}{2}\right)=0.$$

Die den beiden Parameterpaaren $u_1' \mid u_2'$ und $u_1'' \mid u_2''$ entsprechenden Congruenzstrahlen schneiden sich also, wenn die beiden Parameterpaare einer der 4 Relationen genügen:

(69)
$$\begin{cases}\vartheta\begin{pmatrix}1\,1\\0\,1\end{pmatrix}\left(\frac{u_1'-u_1''}{2}\;\middle|\;\frac{u_2'-u_2''}{2}\right)=0,\\[2ex]\vartheta\begin{pmatrix}0\,0\\1\,1\end{pmatrix}\left(\frac{u_1'+u_1''}{2}\;\middle|\;\frac{u_2'+u_2''}{2}\right)=0,\\[2ex]\vartheta\begin{pmatrix}0\,1\\1\,1\end{pmatrix}\left(\frac{u_1'-u_1''}{2}\;\middle|\;\frac{u_2'-u_2''}{2}\right)=0,\\[2ex]\vartheta\begin{pmatrix}1\,0\\0\,1\end{pmatrix}\left(\frac{u_1'+u_1''}{2}\;\middle|\;\frac{u_2'+u_2''}{2}\right)=0.\end{cases}$$

Unter diesen 4 gleichberechtigten Formen der Bedingung des Schnittes zweier beliebiger, reeller oder nicht reeller Congruenzstrahlen finden sich im Besonderen die in den Sätzen IV und V angegebenen Gleichungen wieder.

*) Vgl. Krazer, a. a. O., S. 2, Formel 8.

Die vorstehende Arbeit wird, um 2 Kapitel vermehrt, im 22. Bande der Mathematischen Annalen zum Abdrnck gelangen.

Thesen.

I.

Mit der algebraischen Darstellung der hyperelliptischen ϑ-Quotienten, wie sie zuerst von Göpel und Rosenhain gefunden wurde, ist das eigentliche Umkehrproblem der hyperelliptischen Integrale 1. Ordnung nicht vollständig gelöst.

II.

Geometrie und Analysis sind nur verschiedene Anschauungsweisen derselben mathematischen Wahrheiten.

III.

Literaturkenntniss ist an dem Mathematiker nicht geringer zu achten, als schöpferische Thätigkeit.